Economía y Sociedad, No 16
Mayo – Agosto del 2001, pp 45-60

ANÁLISIS ESPECTRAL: CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y APLICABILIDAD

Diana González Gómez
gonzalezgd@bccr.fi.cr
Departamento de Investigaciones Económicas del B.C.C.R.

Resumen

El trabajo presenta una descripción de las principales características de la técnica de análisis espectral, sus ventajas y desventajas. Este método es utilizado para realizar descomposiciones de una serie en la totalidad de sus componentes cíclicos. El objetivo del trabajo es introducir al lector esta herramienta para que pueda aplicarla en aquellos estudios en donde esta técnica sea adecuada. Además incluye a manera de ejemplo, una aplicación, en donde se realiza un modelo de pronóstico de corto plazo de la Emisión Monetaria.

I. INTRODUCCIÓN [1]

El análisis de series de tiempo se refiere al grupo de estadísticas donde las observaciones son recogidas en forma secuencial y se busca, al menos parcialmente, entender o explotar la dependencia entre esas observaciones. La principal vía a través de la cual se analizan las series de tiempo corresponde al análisis de los modelos ARIMA. Sin embargo, existen al menos otras dos grandes formas de estimación, que son: la aproximación por estado espacial[2] y el análisis espectral. El estudio se enfoca en éste último.

El análisis espectral descompone un conjunto de datos en términos de sus componentes cíclicos o repetitivos. Originalmente, fue aplicado a la ingeniería, donde los métodos de transformaciones de Fourier -- en que se basa el análisis espectral--, han sido aceptados; pero ahora también es ampliamente utilizado en los análisis estadísticos estándares.

En economía, el principal uso del análisis espectral es encontrar y descomponer una serie de tiempo en sus componentes cíclicos. Puede ser utilizado, ya sea para encontrar patrones de comportamiento en una misma serie o entre dos series. Como por ejemplo, se ha utilizado para encontrar evidencia de ciclos en los gastos de turistas extranjeros, realizar análisis de los componentes del gasto de un gobierno, buscar conmovimientos entre mercados accionarios y patrones de transacciones en un mercado particular. Además, puede ser utilizado indirectamente para generar pronósticos del comportamiento de series de tiempo en donde los modelos ARIMA no generan estimaciones eficientes, modelar series de periodicidades semanales o diarias o incluso, generar indicadores adelantados para una serie.

El objetivo de este trabajo, es presentar al lector una guía sobre las características básicas de la técnica del análisis espectral que sirva de herramienta de análisis en otros estudios. En la primera sección, se describe brevemente un marco teórico sobre la técnica espectral. La segunda sección, presenta una aplicación de esta técnica, en donde se realiza un pronóstico de corto plazo de la Emisión Monetaria. Adicionalmente, se incluye un apartado de 3 anexos, en donde se describe el procedimiento para realizar el análisis espectral utilizando el SPSS.

[1] Se agradecen los comentarios de la MSc. Katia Vindas S. y el ME. Jorge Madrigal B. en la elaboración de esta nota técnica.
[2] Para más detalle ver Hamilton, J. (1994), pág. 372

II. ANÁLISIS ESPECTRAL

En esencia, el método espectral descompone una serie de tiempo estacionaria[3] como una suma de un conjunto de series de componentes cíclicos con propiedades específicas. Además, el análisis espectral se puede aplicar a pares de series con el fin de identificar relaciones entre ciclos de la misma serie.

Se debe considerar que este tipo de análisis nunca va a estar en contradicción con los resultados generados por los modelos ARIMA e incluso se sugiere que en el caso de que un modelo ARIMA represente adecuadamente la serie, es mejor utilizar esa técnica.

En general, al análisis espectral se le llama análisis en el dominio de frecuencia, ya que la frecuencia es una medida para representar ciclos. La frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo. Así, la frecuencia de un ciclo de cuatro meses en una serie mensual, es ¼. En general, la j-ésima frecuencia es expresada como w=j/N, donde j es el número de veces que el ciclo se repite en la muestra y N es el número de observaciones. Por ejemplo, si el n es 6 y el total de observaciones es 24, la frecuencia es 6/24, es decir, ¼.

Además, es importante resaltar el hecho de que el análisis espectral no depende de un modelo para generar resultados. Este analiza la serie en forma puramente matemática y no está basado en ninguna teoría acerca de los procesos que definen las series. Por esto se requiere una gran cantidad de datos para utilizar esta técnica (se recomienda al menos 100 observaciones).

A continuación se describen los aspectos básicos del análisis espectral para una serie de tiempo, los indicadores que se generan cuando se realiza un estudio para pares de series y se puntualizan las principales ventajas y desventajas del uso de esta técnica.

2.1. El Caso Univariable

La idea básica del análisis espectral es que un proceso estacionario Y_t puede ser descrito como la suma de movimientos de seno y coseno de diferente frecuencia y amplitud. La meta es determinar cuales son los ciclos de diferentes frecuencias importantes para describir el comportamiento de Yt. Estos ciclos pueden ser de corto o largo plazo, por lo que no se realiza una descomposición de la serie en la forma usual de tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular, sino que en su lugar se descompone la serie en la totalidad de frecuencias existentes.

Si se tiene un proceso estacionario con media $E(Y_t)=\mu$ y autocovarianzas $E(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu)=\gamma_j$, y se asume que estas autocovarianzas son absolutamente sumables, la función de autocovarianzas generada se puede representar de la siguiente manera:

$$g_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j * z^j \qquad (1)$$

donde z es un escalar complejo. Si la expresión anterior se divide entre 2π y se evalúa para z=e-iw donde $i=\sqrt{-1}$ y w es un escalar real; es decir, se realiza una transformación de Fourier, el resultado es llamado el espectro poblacional de Y:

$$s_y(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-iwj} \qquad (2)$$

si adicionalmente, se utilizan algunos resultados trigonométricos y teoremas, el espectro poblacional se puede reescribir como[4]:

$$s_y(w) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(wj)\right] \qquad (3)$$

[3] En términos generales, se dice que un proceso estocástico o aleatorio es estacionario si "su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o rezago entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza". Gujarati, Damodar. (1997), pág. 697. En el caso de que la serie no sea estacionaria, se pueden realizar transformaciones como diferenciar las series, aplicarle logaritmos o la raíz a las series. Además, si el objetivo del análisis no es determinar presencia de estacionalidad, se puede desestacionalizar la serie previamente.

[4] Para detalles sobre el desarrollo matemático del análisis espectral ver Hamilton, J (1994), págs. 152-179 ó en forma extensa en Priestley, M. (1981), Vol. I y II.

Esta es la representación espectral de la serie en el dominio de frecuencia e indica que la serie es igual a la suma de su promedio más la suma de un conjunto autocovarianzas de ciclos con frecuencias wj. Además, al emplear otras propiedades matemáticas se puede probar que el área bajo el espectro de población entre $\pm\pi$ es la varianza de la serie Y_t. Esta representación espectral se puede visualizar a través de un gráfico al que se le llama periodograma[5].

La estimación empírica del espectro poblacional a partir de una muestra finita es conocida como análisis espectral. Para ello, debe considerarse que para una muestra de tamaño T, el ciclo más amplio que puede ser detectado en los datos es una frecuencia que completa un ciclo en toda la extensión de la serie. Además el período más corto que se puede considerar o la frecuencia más alta es de 2 meses (asumiendo datos mensuales). La totalidad de frecuencias que se pueden observar son tantas como la mitad del número de observaciones. Por ejemplo, si se tienen 100 observaciones, no se pueden observar más de 50 frecuencias diferentes.

Existe un teorema adicional que permite trasladar la representación espectral de una serie a una representación en el dominio de tiempo en donde el valor de y para una fecha t puede ser expresado como:

$$y_t = \hat{\mu} + \sum_{j=1}^{M} \left\{ \alpha_j \cdot \cos\left[w_j(t-1)\right] + \delta_j \cdot \operatorname{sen}\left[w_j(t-1)\right] \right\} \quad (4)$$

en donde wj es igual a $2\pi F$, F es la frecuencia y el valor M es ((T-1)/2). Los parámetros α y δ pueden ser estimados mediante una regresión lineal. Adicionalmente, se puede probar que las variables exógenas son linealmente independientes y si se incluyen todas las frecuencias, se puede obtener una regresión que se ajusta perfectamente.

La estimación espectral del espectro poblacional es un estimador insesgado de dicho espectro, pero es inconsistente. Esto porque la varianza de los estimadores no tienden a cero cuando el número de datos se incrementa y el número de parámetros a ser estimados es igual al número de observaciones. Para evitar éste problema, se utilizan unos estimadores conocidos como kernel, en donde se realiza una estimación llamada "densidad espectral". Esta estimación es un promedio ponderado de los puntos vecinos del análisis espectral. Este acercamiento asume que sy(w) es cercano a sy(λ) cuando las frecuencias w y λ se encuentran cerca entre sí. El estimador de kernel del espectro a una frecuencia wj es un promedio ponderado de los ciclos muestrales a frecuencias cerca de wj, donde la suma ponderada es igual a uno[6].

Sin embargo, esa operación necesariamente introduce cierta pérdida de información en el procedimiento de su estimación. Existen estudios teóricos que se enfocan en determinar la cantidad de ciclos de frecuencias cercanas que se deben agrupar para obtener un equilibrio óptimo entre varianza y sesgo. En la práctica, esto usualmente significa que existe cierto elemento subjetivo a ser desarrollado.

Para sustentar estadísticamente los resultados obtenidos del análisis espectral se pueden estimar límites de confianza (ver anexo 3 para detalles más completos).

Un último aspecto que debe considerarse sobre el análisis espectral, es que existen una serie de filtros que permiten aplicaciones específicas. Como por ejemplo, el ajuste estacional de Sims, que sólo puede ser representado en el dominio de frecuencia y el filtro de la Eficiencia de Hannan, que es un procedimiento para corrección de correlación serial. Adicionalmente, el método de análisis espectral puede ser utilizado para pronosticar series de tiempo univariables en forma automática con algunos paquetes econométricos[7].

---

[5] Ver pág. 7

[6] Esto se puede representar como:

$$s_y(w) = \sum_{b=-h}^{h} k(w_{j+b}, w_j) s_y(w_{j+b})$$

$$donde$$

$$\sum_{b=-h}^{h} k(w_{j+b}, w_j) = 1$$

Aquí, b es un parámetro de agrupamiento que indica el número de frecuencias utilizadas en la estimación del espectro a wj.

[7] Manual de Rats. (1996), págs. 11-9 a 11-12.

2.2. El Caso Bivariado o Análisis Espectral Cruzado[8]

El análisis espectral puede ser ampliado al estudio de dos series de tiempo simultáneamente, de forma que se pueda analizar la interacción existente. Relaciona los componentes o bandas frecuenciales con el fin de obtener el grado de "asociación" entre ellas.

En razón de que este método relaciona pares de series de tiempo, es posible obtener estadísticos análogos a los que se derivan del análisis de regresión y correlación. El espectro cruzado, $s_{xy}(w)$, es utilizado cuando se quiere determinar las relaciones entre dos variables estacionarias. Este es definido como la transformación de Fourier de la función de covarianza cruzada, $y_{xy}(k)$. En general el espectro cruzado es complejo, su parte real es llamada el co-espectro c(w) y su parte imaginaria es llamada el espectro cuadrado q(w). Estas funciones son difíciles de interpretar y por ello es usual enfoncarse sobre otras funciones derivadas de ellas. La práctica general es caracterizar el espectro cruzado por medio de tres estadísticos:

- **Coherencia:** Esta cantidad mide el cuadrado de la correlación lineal entre dos variables para una frecuencia dada w y es análoga al cuadrado del coeficiente de correlación. Este se encuentra entre 0 y 1, por lo que si la coherencia es cercana a uno para una frecuencia w dada, significa que los componentes de las dos series están altamente relacionados, pero un valor cercano a cero significa que no están relacionados.

- **Desplazamiento de fase:** Es una medida de la diferencia de fase entre los componentes de frecuencia de dos procesos. Aproxima el número de unidades de tiempo (meses) que separan los picos (o valles) del componente periódico de una serie con su similar en la otra serie, es decir, brinda una estimación del adelanto o rezago medio de una serie respecto a la otra en cada banda frecuencial.

- **Ganancia:** Registra el escalar por el cual la amplitud de una serie en cada frecuencia debe ser multiplicada para reproducir el componente de la amplitud a la cual esta frecuencia aparece en la serie cruzada, por tanto es análogo a la pendiente en el análisis de regresión.

Este conjunto de estadísticos provee las herramientas necesarias para estudiar el grado de asociación y la relación en el tiempo entre cualquier par de series.

2.3. Ventajas y Desventajas del Análisis Espectral

2.3.1. Las principales ventajas que posee esta técnica son:

- Permite manejar la combinación de regularidad y aleatoriedad típicamente encontrada en las series de tiempo económicas. Esto significa que no es necesario eliminar los componentes irregular y estacional de las series para estudiar su comportamiento.

- Analiza relaciones económicas con más detalle de lo que los métodos tradicionales de construcción de modelos econométricos son capaces[9]. Esto porque permite a los datos "hablar por sí mismos" y no existe el riesgo de subespecificación del modelo. Describe las fluctuaciones de los ciclos económicos de una serie de tiempo en forma más correcta, por cuanto considera todo el comportamiento histórico de la serie en estudio y no sólo sus picos y valles. Es un método matemáticamente más riguroso y general que los modelos ARIMA, dado que examina con mayor flexibilidad la descomposición de una variable en sus componentes. Es una forma natural y potencialmente más poderosa de seleccionar un indicador representativo del fenómeno en estudio[10].

- Puede utilizarse para series con cualquier tipo de periodicidad.

2.3.2. Las desventajas son:

- Las series de tiempo deben ser estacionarias. Transformar una serie puede alterar el espectro

[8] Granger, C. (1964), págs 77-79.

[9] Pacheco, R y Ordoñez R. (1995), pág. 21.

[10] Ibid, pág. 22.

de la serie básica. Por ejemplo, un promedio móvil simple, comúnmente utilizado en el dominio de tiempo para reducir las variaciones de alta frecuencia (baja periodicidad o ciclos de largo plazo), es un filtro de "transmisión de baja banda[11]" que magnifica el espectro de la serie señalada a bajas frecuencias y contrae el espectro a altas frecuencias. Tomar la primera diferencia de la serie es un filtro "transmisión de alta banda[12]" que filtra la mayoría de las variaciones de baja frecuencia y magnifica la variación de alta frecuencia (de hecho, para una serie estacionaria, la primera diferencia elimina completamente la contribución a la varianza para la frecuencia de cero, sin embargo, este no es el caso para series no estacionarias). Estos dos filtros no son "ideales" en el sentido que ellos no eliminan la variación a una banda específica de frecuencia.

- Utiliza únicamente las frecuencias de Fourier, que son aquellas que contienen un número completo de ciclos desde la primera hasta la última observación. Por ello, las frecuencias particulares utilizadas dependen de la extensión de las series y es enteramente posible que un ciclo importante en los datos no sea tomado en el análisis. Si se conoce la existencia de la periodicidad de la serie y se quiere mostrar claramente, entonces la extensión de la serie debe ser un múltiplo de esa periodicidad

- El método espectral requiere más datos (sobre 100 observaciones) que otros técnicas, debido a que no utiliza la muestra en forma eficiente.

- Es un modelo ateórico, en el sentido de que no responde a alguna teoría económica.

[11] En inglés *low-band-pass*

[12] En inglés *high-band-pass*

III. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE ANÁLISIS ESPECTRAL: PRONÓSTICO DE CORTO PLAZO DE LA EMISIÓN MONETARIA

En esta sección se aplica el método espectral, como ejercicio teórico, a la serie de datos semanales de la Emisión Monetaria (EMI) y se mide su capacidad de pronóstico. La serie utilizada corresponde a los datos semanales que van del 5 de enero de 1990 al 31 de diciembre de 1999[13].

Además, el análisis espectral se compara con otra herramienta que se podría utilizar para pronosticar series semanales en la forma tradicional de estimación. Esto es, por agregación de tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular. Actualmente, se estiman los coeficientes de estacionalidad semanal, pero no el componente de tendencia o ciclo, por lo que se va a suponer que se pueden predecir exactamente esos agregados.

3.1. Procedimiento y Resultados

3.1.1.Estacionariedad de la serie:

Primero se determina si existe estacionariedad. En este caso no existía, por lo que fue necesario calcular el logaritmo de la serie y obtener sus diferencias.

3.1.2.Estimación del espectro y determinación de los valores relevantes:

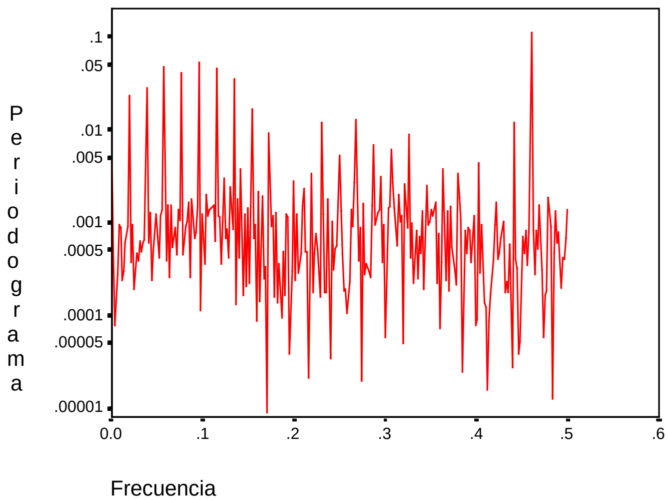
La descomposición de la serie por frecuencias, se obtiene aplicando el programa SPSS, como es explicado en el anexo 1. Esta representación se puede ver gráficamente con el periodograma. Este muestra la importancia de cada frecuencia de Fourier en la representación de la serie. Se puede graficar por período o por frecuencia y el eje vertical es la suma de los cuadrados del seno y coseno, por lo que los datos de mayor valor son las frecuencias más representativas de la serie. En este caso, el periodograma muestra que el logaritmo natural de la Emisión Monetaria (LEMI) está altamente influenciado por ciclos de periodicidades menores a cincuenta y dos semanas (ver gráficos 1 y 2).

[13] La última actualización de la metodología de factores estacionales se encuentran en DIE-008-2000.

Una vez estimado el espectro, se toman las frecuencias que presentan mayores valores en el periodograma, para utilizarlos en el siguiente paso.

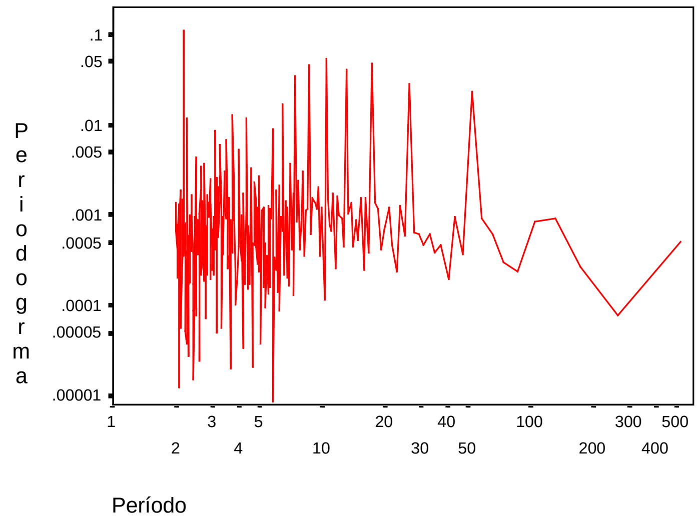
PERIODOGRAMAS DEL LOGARITMO DE LA EMISIÓN MONETARIA DIFERENCIADO UNA VEZ (DLEMI) POR FRECUENCIAS Y POR PERÍODOS

Gráfico N°1
Periodograma de DLEMI



Fuente: Elaboración propia

Gráfico N°2
Periodograma de DLEMI



Una vez obtenido el gráfico espectral, se seleccionan las frecuencias significativas. En este caso se usó como criterio, escoger aquellas frecuencias cuyo valor en el periodograma es mayor a 0.002. En el cuadro 1 se muestran esas frecuencias.

Cuadro 1
Frecuencias seleccionadas

Frecuencia	Periodicidad
0.01916	52.20000
0.03831	26.10000
0.05747	17.40000
0.07663	13.05000
0.09579	10.44000
0.11494	8.70000
0.13410	7.45714
0.15326	6.52500
0.17241	5.80000
0.22989	4.35000
0.24904	4.01538
0.26820	3.72857
0.28736	3.48000
0.30651	3.26250
0.32567	3.07059
0.40230	2.48571
0.44061	2.26957
0.45977	2.17500

Fuente: Elaboración propia

3.1.3. Transformación del espectro del dominio de frecuencia al dominio de tiempo:

Este paso consiste en trasladar los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia al dominio de tiempo. Esto se realizó estimando un modelo de ecuación lineal con la función expresada en la ecuación (4).

En este caso la variable dependiente es LEMI y las independientes, la suma de senos y cosenos de las periodicidades seleccionadas en el punto anterior. En donde wj es igual a $2\pi F$, F son las frecuencias escogidas y n es el número de observación. En el cuadro 2 se resumen los resultados de la regresión.

Cuadro 2
Resultados del ajuste de regresión

Variable	Coeficiente	Estadístico T	Pro.
Constante	0.003872	4.999946	0.0000
A[1]	0.183750	10.53913	0.0000
B[2]	-0.129337	-7.419120	0.0000
SEN(0.12037*(n-1))	-0.008605	-7.876867	0.0000
SEN(0.24074*(n-1))	-0.010181	-9.306975	0.0000
SEN(0.36110*(n-1))	-0.009847	-8.998493	0.0000
SEN(0.48147*(n-1))	-0.006717	-6.144911	0.0000
SEN(0.60184*(n-1))	-0.002205	-2.018827	0.0441
SEN(0.72221*(n-1))	0.003440	3.147823	0.0018
SEN(0.84257*(n-1))	0.005717	5.222884	0.0000
SEN(0.96290*(n-1))	0.005071	4.629887	0.0000
SEN(1.0833*(n-1))	0.006657	6.082217	0.0000
SEN(1.4444*(n-1))	-0.004410	-4.026419	0.0001
SEN(1.5647*(n-1))	-0.003767	-3.436006	0.0006
SEN(1.6851*(n-1))	-0.003633	-3.315594	0.0010
SEN(1.8055*(n-1))	-0.001715	-1.566972	0.1179
SEN(1.9258*(n-1))	0.000948	0.866881	0.3865
SEN(2.0462*(n-1))	0.001933	1.764986	0.0783
SEN(2.5277*(n-1))	-0.003761	-3.440548	0.0006
SEN(2.7684*(n-1))	-0.004630	-4.231090	0.0000
SEN(2.8888*(n-1))	-0.014890	-13.61853	0.0000
COS(0.1203*(n-1))	0.002799	2.549168	0.0111
COS(0.2407*(n-1))	-0.003409	-3.108646	0.0020
COS(0.3611*(n-1))	-0.010466	-9.547420	0.0000
COS(0.4814*(n-1))	-0.011526	-10.50383	0.0000
COS(0.6018*(n-1))	-0.015339	-13.96738	0.0000
COS(0.7222*(n-1))	-0.014348	-13.07221	0.0000
COS(0.8425*(n-1))	-0.011408	-10.40994	0.0000
COS(0.9629*(n-1))	-0.007365	-6.725583	0.0000
COS(1.083*(n-1))	-0.000751	-0.685654	0.4933
COS(1.444*(n-1))	0.005242	4.786874	0.0000
COS(1.564*(n-1))	-0.002235	-2.042933	0.0417
COS(1.685*(n-1))	-0.006254	-5.712859	0.0000
COS(1.805*(n-1))	-0.005000	-4.561581	0.0000
COS(1.925*(n-1))	-0.005195	-4.738016	0.0000
COS(2.046*(n-1))	-0.006238	-5.695824	0.0000
COS(2.527*(n-1))	-0.000791	-0.720713	0.4715
COS(2.768*(n-1))	0.004593	4.190903	0.0000
COS(2.888*(n-1))	-0.015468	-14.10002	0.0000

[1]variable dummy agregada debido al comportamiento de la serie el 12 de diciembre de 1994
[2]variable dummy agregada debido al comportamiento de la serie el 6 de enero de 1995
Fuente: Elaboración propia

Gráfico N°3
Comparación de ajustes para 1999

La regresión ajustada tiene un error estándar de regresión de 1.6% y un error cuadrático medio de 12%. El R2 ajustado fue de 0.77, sin embargo, debe recordarse que éste no es un buen estimador cuando existen valores rezagados de la variable dependiente, ya que su valor cambia dependiendo del filtro que se aplique y en este caso, se utiliza la diferencia de los logaritmos de la serie[14]. En el gráfico 3 se presenta una comparación entre la serie observada (EMI) y el ajuste estimado con la técnica espectral (AEct) para el año de 1999. También se incluyen dos series más que corresponden al ajuste de la tendencia según el método de Hodrick-Prescott (SCst) y la serie que se obtendría de sumar una estimación de los factores estacionales y la tendencia. De aquí se puede observar que la tendencia tiende a crecer en el tiempo, pero presenta un patrón fluctuante.

3.2. Evaluación de la Capacidad de Pronóstico del Modelo

La capacidad de pronóstico del modelo, se midió calculando el error cuadrático medio para varios períodos fuera de la muestra. La muestra seleccionada fue de enero de 1990 a diciembre de 1998, con el fin de utilizar los datos observados en 1999 como parámetro de comparación. Además, se calculó el error cuadrático medio[15] que se obtiene de pronosticar el comportamiento de la serie mediante la metodología tradicional.

Como fue mencionado anteriormente, la metodología tradicional descompone la serie en tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular. Actualmente, la estacionalidad es calculada de la siguiente manera: primero se elimina la tendencia de la serie original con el filtro de Holdick-Prescott, se seleccionan las variables en forma manual, en donde se escogen aquellos ciclos cuyo estadístico t es significativo y luego se calculan los componentes estacionales como una suma de funciones seno y coseno ajustadas de acuerdo a la semana o día el mes en que se encuentre el dato[16]. El componente de tendencia-ciclo utilizado en este estudio son los valores reales observados de la tendencia para 1999. Es decir, se supone que se puede predecir exactamente el comportamiento de la tendencia.

---

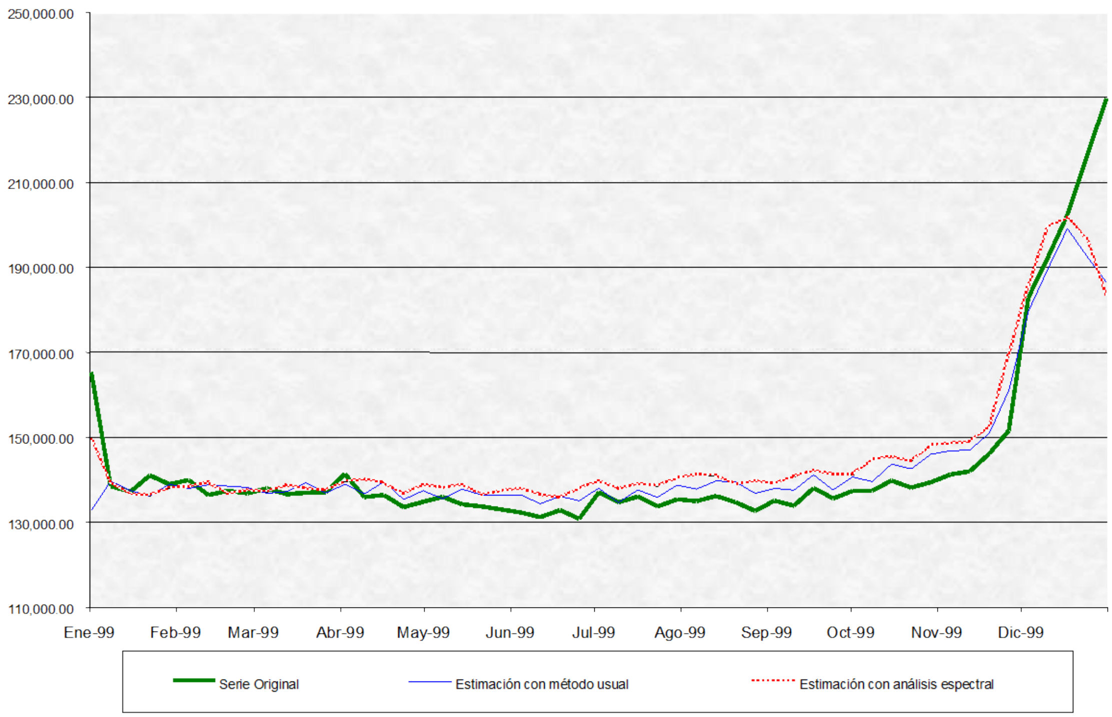
[14] Pierce, D. (1979), pág. 901.

[15] Según Kikut, A y Mayorga, M. (1995), pág. 37, el error cuadrático medio se calcula con base en la siguiente fórmula: $\frac{\sqrt{\sum e_n^2 / n}}{\sum y_n / n} * 100$, donde e_n es el residuo entre el valor proyectado y el observado para la semana n y y_n es el valor observado de la variable dependiente a estimar en el trimestre n.

[16] Explicada ampliamente en Muñóz, E. (1997).

En el gráfico 4 se pueden observar los resultados pronosticados para 1999[17] con las dos técnicas y los valores reales. De aquí es inmediato ver, que para los primeros tres meses de pronóstico (aproximadamente doce semanas) el análisis espectral es eficiente. Sin embargo, a medida que el período de estimación se incrementa, el pronóstico tiende a sobrestimar la serie en forma creciente. Esto es debido a que el periodograma es un estimador inconsistente del espectro (la varianza de los estimadores no tiende a cero cuando el número de datos se incrementa). Los mismos resultados se presentarían si se realiza todo el ejercicio con datos hasta diciembre de 1997 o marzo de 1999 y pronostica para el resto de 1999.

Gráfico N°4
Pronóstico para 1999 con las dos metodologías



En el cuadro 3 se encuentran los errores medios de pronóstico aplicando la metodología tradicional (SC) y el análisis espectral (AE) para un año y descompuesto por trimestres (doce semanas) fuera de la muestra. En la segunda y tercera columnas, se incluyen todos los elementos del pronóstico. En la cuarta y quinta columnas se excluyen tres valores de pronóstico extremos. Esto debido a que cada uno representa más de un 10% de la suma de los errores al cuadrado y que corresponden a la primera y dos últimas semanas del año.

Se puede notar como los errores son relativamente bajos con cualquiera de los dos procedimientos si el pronóstico se realiza para el total de 1999 (cuadro 3).

Si se realiza para las primeras doce semanas del año el error cuadrático medio es menor utilizando el método de análisis espectral. Sin embargo, el pronóstico para los siguientes trimestres es más exacto utilizando el método tradicional.

[17] En el anexo 2 se encuentran los valores de los coeficientes utilizados con cada una de las técnicas

Cuadro 3
Resultados del error cuadrático medio de pronóstico

	Todos los valores		Sin valores extremos[1]	
	SC	**AE**	**SC**	**AE**
Total 1999	**6.09**	**6.14**	**2.20**	**3.44**
1er trimestre	*6.59*	*3.38*	*1.29*	*1.25*
2do trimestre	2.21	3.17		
3er trimestre	2.20	3.72		
4to trimestre	8.52	9.33	2.56	4.17

[1]Se excluyeron tres valores extremos de la serie (primer, penúltimo y ultimo datos).

Fuente: Elaboración propia.

De estos resultados, se puede concluir que el método de AE es bueno para realizar pronósticos para pocos períodos fuera de la muestra. Por lo que sería necesario realizar estimaciones cada tres o cuatro meses si se quiere generar estimaciones semanales vía análisis espectral[18].

Por otra parte, si la tendencia de la serie de la emisión monetaria puede ser pronosticada perfectamente, como se supone en este ejercicio, el método actual vía factores estacionales es adecuado para realizar pronósticos para 52 semanas fuera de la serie. Aunque se debe recordar que existen tres valores extremos que afectan en mayor grado al pronóstico con el método tradicional.

Finalmente, si lo que se quiere obtener es únicamente los factores estacionales semanales, el método actual es más eficiente, ya que captura con pocas variables los efectos de los movimientos entre semanas y la ubicación de éstas dentro del año. En cambio, con el método de análisis espectral, debido a que la posición de los días en las semanas y años varía, se requiere una gran cantidad de variables para estimar comportamientos estacionales, definidos como aquellos de periodicidad menor a un año.

IV. CONSIDERACIONES FINALES

La finalidad de este documento es servir como base para difundir las principales características de la técnica de análisis espectral, con el objetivo de que ésta sea considerada en la elaboración de estudios en los que comportamientos cíclicos o repetitivos sean relevantes.

Al igual que otras técnicas, el análisis espectral tiene ventajas y desventajas que deben ser consideradas en el momento de decidir aplicar este instrumento. Las principales ventajas son: no es necesario descomponer una serie en tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular, permite analizar relaciones económicas con más detalle y las relaciones entre dos series para cada frecuencia específica y puede ser utilizada para series con cualquier tipo de periodicidad. Por otro lado, las desventajas son: requiere una gran cantidad de observaciones, es un modelo ateórico y sólo puede ser aplicado a series estacionarias.

El análisis espectral puede ser utilizado para pronosticar series con cualquier tipo de periodicidad, lo cual representa una gran ventaja con respecto a los modelos ARIMA, ya que éstos sólo pueden ser utilizados con series de periodicidad mayor o igual a la mensual.

Del ejemplo presentado en la segunda sección, en donde se aplicó tanto el análisis espectral como el método tradicional a la serie semanal de la Emisión Monetaria, se obtuvo que el método de análisis espectral genera mejores predicciones que el método tradicional para periodos cortos de pronóstico.

[18] No obstante, se debe hacer la observación de que en realidad existen programas econométricos a través de los cuales se pueden hacer pronósticos por medio de la densidad espectral, con lo que se evitaría el problema de insesgamiento y se podría pronosticar para mayores períodos de tiempo.

V. BIBLIOGRAFÍA

Cohen, D. ***An Analysis of Government Spendig in the Frequency Domain***. Federal Reserve System. Mayo, 1999.

Granger, C. ***Spectral Analysis of Economic Time Series***. 3era ed. Estados Unidos: Princeton University Press, 1964.

Hamilton, J. ***Time Series Analysis***. Princeton University Press: Estados Unidos. 1994.

Kikut, A y Mayorga, M. ***La hipótesis de cointegración y la estabilidad de la demanda por medio circulante en Costa Rica***. En Serie Comentarios sobre asuntos económicos del Banco Central de Costa Rica, N. 140, julio, 1995.

Kikut, A. y Vindas, K. ***Actualización de los coeficientes de estacionalidad semanal de la emisión monetaria***. DIE-EC-01-98.

Muñóz, E. ***Uso de los coeficientes de estacionalidad semanal para estimar el saldo de la emisión monetaria. Propuesta metodológica***. DIE-EC-06-97.

Pacheco, R y Ordoñez, R. ***Construcción de un indicador adelantado a partir del Método Espectral. El caso de la inflación en Costa Rica 1978-1993***. En Serie Comentarios sobre asuntos económicos, No 139, Costa Rica: Banco Central de Costa Rica. 1995, págs. 13-17.

Pierce, D. ***R2 Measures for time Series***. En Journal of the American Statistical Association. EEUU. Vol. 74, no 368. Dic. 1979.

Priestley, M. ***Spectral Analysis and Time Series***. Academic Press, Inc: Estados Unidos, Vol. I y II, 1981.

Smith, R. ***Time Series***. Department of Statistics. University of Nort Carolina. EEUU. Mayo, 1999.

ANEXO 1

Procedimiento para realizar el análisis espectral utilizando el SPSS

El análisis espectral se puede realizar en el SPSS señalando las opciones:

Gráficos

Series de tiempo
Espectral: la ventana que aparece es:

Análisis univariable:

Si se quiere realizar un análisis univariable, se pueden obtener gráficos del periodograma y de la densidad espectral.

Periodograma: El periodograma de una serie muestra la energía o varianza para cada una de las frecuencias de Fourier. Para producir un periodograma se mueve la variable a la lista de variables. Las variables utilizadas en este procedimiento no deben tener ningún dato perdido. En el periodograma el eje horizontal muestra las frecuencias en el que se ha descompuesto las series y el eje vertical muestra el peso relativo, o importancia de cada frecuencia. El valor del eje vertical mostrado en el periodograma es la suma de los cuadrados de los pesos (seno y coseno) para esa frecuencia. El periodograma es graficado en escala logarítmica, lo que permite ver los detalles con mayor claridad. También, debido a que el espectro es simétrico sobre la frecuencia de cero, es común graficar s(w) sobre w sólo para $0<w<\pi$.

Densidad espectral: El problema con el periodograma es que los términos individuales del periodograma tienen grandes varianzas y son estadísticamente independientes. Por ello, se pueden realizar gráficos de densidad espectral, que es el periodograma suavizando con alguna ventana (lo que conlleva cierto costo en resolución y sesgo). Esto se puede hacer, definiendo una ventana y escogiendo la forma y el número de términos del grupo de puntos vecinos que son promediados juntos. La ventana que se escoge se refiere al patrón de los pesos aplicados al construir el promedio móvil. Estos pesos son usualmente simétricos alrededor del punto medio. El mayor peso se da al punto medio y los pesos caen para puntos más lejanos, excepto para la ventana Daniell, donde ellos son constantes.

Los parámetros de agrupamiento indican el número de puntos incluidos en el promedio móvil. Una ventana de muchos datos reduce el efecto de variación aleatoria en el periodograma. Sin embargo, agrupamientos amplios pueden generar pérdidas de información importante. Por ello, lo más adecuado sería utilizar grupos que representen entre un 10% y un 20% de la muestra utilizada. Los grupos deben ser enteros positivos impares. Las ventanas más utilizadas son Tukey y Tukey-Hamming, en tanto que Bartlett ha caído en desuso.

Las fórmulas utilizadas para determinar las ponderaciones van a depender del tipo de ventana. El programa SPSS, tiene disponibles las siguientes ventanas[19]:

- Tukel-Hamming
- Tukey
- Parzen
- Bartlet
- Daniell (unitario), todos los valores del conjunto son valorados de la misma forma
- Ninguno: Es equivalente a obtener el periodograma

Tanto el periodograma como la densidad espectral pueden ser graficados por frecuencia o por período, que es el recíproco de la frecuencia (período = 1/frecuencia).

Otra opción que debe ser tomada en cuenta es la de "centrar variables". Si está seleccionada, ajusta las series para tener una media de cero antes de calcular el espectro y remueve los movimientos de largo plazo que pueden estar asociados con el promedio de las series.

Análisis bivariable:

En el análisis bivariable, siempre la primera variable es comparada con cada una de las otras variables de la lista. Es decir, la primera serie se trata como la variable independiente y el resto de las variables se tratan como variables dependientes. La caja de gráficos[20] muestra para cada diferente frecuencia los siguientes valores:

- Coherencia cuadrada
- Densidad cospectral
- Espectro cuadrado
- Espectro de fase
- Amplitud cruzada
- Ganancia

Con estas opciones se generan todos los resultados gráficos, pero no se obtienen los datos utilizados en los gráficos generados. Para guardar estas variables en el archivo de datos y poderlas utilizar en análisis subsecuentes, se debe utilizar el subcomando SAVE. Para ello, antes de ejecutar el análisis se debe elegir en el menú:

Edición

  Opciones

    Guardar comandos

Luego se debe ejecutar el análisis y en el archivo de sintaxis se copian los comandos y al final se le agrega la opción "/SAVE =" y se obtienen los datos que se quieren. Por ejemplo, en el caso de que se quieran los datos de períodos de Fourier, valores de la función coseno para cada frecuencia de Fourier, valores del periodograma, valores estimados de la densidad espectral, valores estimados del espectro de fase, valores de ganancia y valores de la coherencia cuadrada, se debe ejecutar:

/SAVE = PER (Períodos) COS (coseno) P (periodograma) S (espectral) PH (fase) G (ganancia) K (coherencia2)

---

[19] Para mayor información sobre las ventanas ver: Priestley, M. (1981).

[20] Ver más detalles en el manual del SPSS 6.1 Trends (1994).

ANEXO 2

Valores de los coeficientes estimados con datos de 1990 a 1998

a. Técnica de factores de estacionalidad

Variable	Coeficiente	Estadístico T
C1A	0.067257	15.23441
C2A	0.041345	11.05683
C3A	0.029038	9.383907
C4A	0.016335	6.278284
C5A	0.008673	3.951585
C6A	0.000138	0.072791
C7A	-0.002595	-1.550095
C8A	-0.002372	-1.582023
C9A	-0.005493	-4.037310
C13A	0.002508	2.471381
C14A	0.003873	4.028653
C2M	0.009777	13.29536
C4M	-0.003486	-1.434363
S1A	0.024364	5.533944
S2A	-0.010258	-2.744888
S3A	-0.024252	-7.841643
S4A	-0.019860	-7.651739
S5A	-0.023190	-10.55093
S6A	-0.019755	-10.38388
S7A	-0.014566	-8.680875
S8A	-0.008877	-5.907505
S9A	-0.002880	-2.112696
S13A	2.07E-05	0.020329
S14A	-0.002017	-2.096631
S2M	0.004444	6.106754
S4M	-0.001106	-0.462259
AR(1)	0.734179	22.65488

El R2 ajustado fue de 0.938, el error estándar de la regresión 1.9% y la suma de los residuos al cuadrado de 1.63%.

b. Técnica de análisis espectral

Variable	Coeficiente	Estadístico T
A	0.168531	8.659523
B	-0.104162	-5.352077
C	0.003891	4.501644
COS(2.880351473*(n-1))	-0.002081	-1.703561
COS(0.602864262*(n-1))	-0.014156	-11.55914
COS(0.723437114*(n-1))	-0.014747	-12.03950
COS(0.361718557*(n-1))	-0.008623	-7.055021
COS(0.48229141*(n-1))	-0.009705	-7.933801
COS(0.844009967*(n-1))	-0.012734	-10.40654
COS(0.241145705*(n-1))	-0.002261	-1.848624
COS(0.120572852*(n-1))	0.003291	2.688076
COS(0.964582819*(n-1))	-0.008858	-7.247629
COS(1.085155671*(n-1))	-0.003788	-3.099784
COS(2.759778621*(n-1))	-0.003389	-2.770513
COS(2.893748457*(n-1))	0.005788	4.737774
COS(1.446874229*(n-1))	0.006569	5.367545
COS(1.942562622*(n-1))	-0.003844	-3.148209
COS(1.688019933*(n-1))	-0.001590	-1.301959
COS(1.848783736*(n-1))	-0.000632	-0.517648
COS(2.022944523*(n-1))	0.002833	2.313825
SIN(2.880351473*(n-1))	0.010223	8.357453
SIN(0.602864262*(n-1))	-0.005980	-4.900703
SIN(0.723437114*(n-1))	-0.000857	-0.702136
SIN(0.361718557*(n-1))	-0.011153	-9.123794
SIN(0.48229141*(n-1))	-0.008804	-7.207305
SIN(0.844009967*(n-1))	0.001374	1.125297
SIN(0.241145705*(n-1))	-0.010301	-8.430527
SIN(0.120572852*(n-1))	-0.008365	-6.854969
SIN(0.964582819*(n-1))	0.001994	1.631363
SIN(1.085155671*(n-1))	0.005759	4.709968
SIN(2.759778621*(n-1))	0.000593	0.485078
SIN(2.893748457*(n-1))	-0.016946	-13.85478
SIN(1.446874229*(n-1))	-0.000237	-0.194082
SIN(1.942562622*(n-1))	-8.65E-05	-0.070663
SIN(1.688019933*(n-1))	-0.006806	-5.561837
SIN(1.848783736*(n-1))	-0.003141	-2.565240
SIN(2.022944523*(n-1))	0.001090	0.893272
COS(2.170311343(n-1))	-0.000719	-0.587873
SIN(2.170311343*(n-1))	-0.004084	-3.341855

El R2 ajustado fue de 0.72, el error estándar de la regresión 1.86% y la suma de los residuos al cuadrado de 1.49%.

ANEXO 3

Estimación de los límites de confianza del espectro

El intervalo de confianza se puede estimar de la siguiente forma:[21] "Si se representa el espectro verdadero como $\Phi(wj)$, donde w es la frecuencia multiplicada por 2π, y el espectro estimado a partir de la muestra como f(wj), entonces la distribución de $f(wj)/\Phi(wj)$ es aproximadamente una $\chi 2k/k$ con k=2n/m grados de libertad, donde: n es el número de observaciones, m es el número de bandas frecuenciales (número de datos/tamaño de banda escogida) utilizados en la estimación del espectro". A partir de esta distribución, es posible construir un intervalo de confianza de $(100-\alpha)$ por ciento para cada frecuencia del espectro $\Phi(wj)$ de la siguiente forma:

$$\Pr\left(\frac{f(w_j)}{\chi^2_{\alpha/2,k} / k} < \Phi(w_j) < \frac{f(w_j)}{\chi^2_{100-(\alpha/2),k} / k} \right) = (100-\alpha)\%$$

Si el valor espectral en cada frecuencia se encuentra dentro de estos límites de confianza, no se rechaza la hipótesis de que el espectro basado en la muestra en esa frecuencia particular sea verdadero.

[21] Pacheco, R y Ordoñez, R. (1995), pág. 27.