Revista Geográfica
de América Central. Nº 46
I Semestre 2011
pp. 15–36

# ELEMENTOS DE CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA Y SU APLICACIÓN EN LA ELABORACIÓN DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS

*Pablo Ramírez Granados**

**RESUMEN**
En este artículo se analizan algunos de los elementos básicos de la cartografía matemática, partiendo de los aspectos generales como sistemas de coordenadas y superficies de referencia. Se discuten además los elementos cartográficos sobre los esferoides, los datums y la definición de los sistemas de coordenadas geográficas, así como las transformaciones esferoidales. Una vez establecidos los conceptos básicos, se discuten los aspectos fundamentales de la teoría de las proyecciones cartográficas y sus principales características.

**Palabras claves:** Cartografía matemática, proyecciones, esferoides, datums, sistemas de coordenadas.

**ABSTRACT**
This article analyzes some basic concepts about mathematical cartography, from general aspects such as coordinate systems and reference surfaces. The cartographic elements concerning spheroids, datum and definitions of geographical coordinate systems are discussed, as well as the spheroid transformations. Based on these basic concepts, the fundamental aspects of cartographic projections theory and its main characteristics are discussed.

**Key words:** Mathematical cartography, projections, spheroids, datum, coordinate systems.

* Centro de Investigaciones en Ciencias Geológicas (CICG), Observatorio del Desarrollo (OdD)
Universidad de Costa Rica. pablo.ramirez@ucr.ac.cr

Fecha de recepción: 13 de agosto del 2010.
Fecha de aceptación: 20 de octubre del 2010.

## 1. Introducción

La estructura básica de cualquier documento cartográfico es un sistema de referencia, que es definido como un reticulado o una cuadrícula, y que tiene por objeto la ubicación geográfica de los datos espaciales, ya sea en coordenadas geográficas o en coordenadas proyectadas.

La elaboración de un sistema de proyección ha sido uno de los temas más interesantes en la ciencia geográfica (Snyder, 1993), ya que involucra lo esencial de la cartografía, la representación de la Tierra en una superficie plana, un mapa o carta, lo cual conlleva a la utilización de ciertas superficies desarrollables de los cuerpos requeridos para modelar matemáticamente la Tierra, es decir, la esfera o el esferoide, conservando, según sea el caso, las áreas, las formas, las direcciones o los ángulos, lo cual depende del propósito específico de la carta geográfica (Bugayevskiy & Snyder, 1995). Como consecuencia de esto se han creado a lo largo de la historia muchas proyecciones, entre las que se pueden citar: la Proyección de Mercator, la Transversal de Mercator, la Cilíndrica Equidistante, la de Cassini, la de Albers, la Conforme de Lambert, la de Bonne, entre otras.

La disciplina de las proyecciones cartográficas -denominada cartografía matemática- tiene muchas interrelaciones con otras disciplinas, especialmente con geografía y matemática (Snyder & Steward, 1997; Feeman, 2000), lo cual ha sido de gran importancia, pues constituye el elemento científico y técnico para la elaboración de mapas que serán fuente primaria para el desarrollo de otras disciplinas. Pese a dicha importancia, muchos geógrafos han dejado de lado este conocimiento y desatienden las bases matemáticas suficientes para entenderlo (Feeman, 2000), aseveración que se puede constatar en el acaecer de la academia y la investigación en Costa Rica, donde no hay debate ni discusión en lo relativo a esta materia.

El presente trabajo sirve como una introducción a la teoría de las proyecciones cartográficas o cartografía matemática, con el fin de retrotraer el tema y someterlo al conocimiento de académicos, profesionales y estudiantes, para así rescatarlo y revisar la importancia de su comprensión, aunado a su utilidad para la creación de las cartas geográficas temáticas, que hoy son ampliamente usadas en los Sistemas de Información Geográfica (SIG) y en la Teledetección.

El artículo que aquí se presenta forma parte del proyecto Nº 830 – A9 – 159, Análisis y Sistema de Información Geográfica aplicado a la Hidrogeología de Costa Rica, del Centro de Investigaciones en Ciencias Geológicas de la Universidad de Costa Rica.

Este trabajo está dedicado a dos estimados colegas, Álvaro Burgos y Eduardo Bedoya, quienes me incentivaron a trabajar e investigar en el área de proyecciones, datums y esferoides, impulsándome a buscar y aprender sobre la disciplina de la geografía matemática muy descuidada por los geógrafos actuales.

## 2. Aspectos generales

El estudio de las proyecciones, escalas y sus variaciones, le concierne a la cartografía matemática, también llamada geografía matemática (Snyder, 1987; Feeman, 2000), que además de hacer uso de mediciones geodésicas, busca desarrollar métodos gráficos para la resolución de problemas de trigonometría esférica, astronomía y navegación (Bugayevskiy & Snyder, 1995; Yang, Snyder & Tobler, 2000).

El estudio y el análisis de proyecciones involucra conocimientos de geometría diferencial y variable compleja (Pearson, 1990; Maling, 1993; Bugayevskiy & Snyder, 1995; Yang, Snyder & Tobler, 2000; Herrera, 2000; Grafarend & Krumm, 2006; Fenna, 2007); estos, a su vez, se basan en distintos métodos matemáticos, como el cálculo de varias variables (Allan, 2004). Wilson & Kirkby (1975), Allan (2004) y Fenna (2007) ofrecen al geógrafo interesado en estas temáticas, aproximaciones didácticas y aplicadas al análisis matemático en cartografía. Para un mayor acercamiento a los métodos matemáticos, el lector puede consultar las excelentes obras de Spiegel (1988), Spiegel (2001), Ayres & Mendelson (2001), Marsden & Tromba (1991), Burden & Faires (2002), Amazigo & Rubenfeld (1980), entre otras. En la obra de Grafarend & Krumm (2006), el lector podrá encontrar demostraciones matemáticas de las proyecciones partiendo de los conocimientos de geometría diferencial y matemáticas superiores.

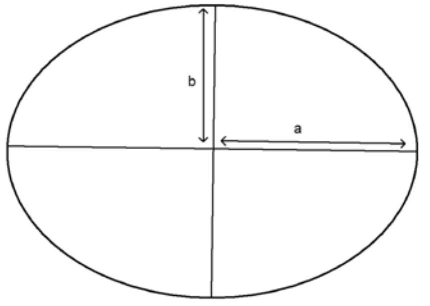
## 3. Las superficies de referencia y los sistemas de coordenadas

La ciencia que estudia el área concerniente a la forma y el tamaño de la Tierra en un sentido geométrico, asociada además con el estudio de ciertos fenómenos físicos, tales como la gravedad, se denomina geodesia (Pearson, 1990; Maling, 1993; Feeman, 2002; Fenna, 2007). Esta se encuentra ligada con la topografía y la cartografía, y es indispensable si se requiere la creación de mapas de la superficie terrestre. La Tierra es un cuerpo cercano a la esfericidad aunque presenta grandes irregularidades, creadas por las masas de tierra y mar, las grandes elevaciones y depresiones, las montañas y los valles. Su radio aproximado es de 6 371 km, con variaciones de relieve que van desde menos de 9 km sobre el nivel del mar, hasta un poco más de 11 km bajo el mismo nivel (Maling, 1993; Iliffe & Lott, 2008), para ejemplicar tan solo los extremos en altitud y en profundidad, el monte Everest y la fosa de las Marianas.

La Tierra tiene una superficie natural que es complicada, esta se llama geoide (Maling, 1993; Iliffe & Lott, 2008), y como se mencionó antes, presenta muchas irregularidades. Para favorecer la elaboración de las cartas geográficas, en cartografía se utilizan dos cuerpos para modelar la superficie de la Tierra, el primero es la esfera y el segundo el esferoide (Snyder, 1987), ambos se aproximan a la superficie natural de la Tierra en su forma total, especialmente la curvatura general. La esfera se usa en cartografía para mapas de escala pequeña, donde el achatamiento de la Tierra es frecuentemente despreciable y esta es vista como una esfera con un radio particular (Yang, Snyder & Tobler, 2000). Asimismo, en el caso de la cartografía en Costa Rica, la superficie que se analiza corresponde con el elipsoide (Presidencia de la República, Ministerio de Justicia & Ministerio de Obras Públicas y Transportes, 2007).

Un elipsoide es una figura derivada de la elipse en las secciones cónicas (Allan, 2004), tiene una serie de propiedades matemáticas importantes con aplicación directa en la construcción de las diferentes proyecciones. Algunas de estas características son: las distancias focales, el radio de curvatura de la elipse, la longitud de la normal a la elipse, la longitud de un arco en la elipse, entre otras. Allan (2004) y Pearson (1990) ofrecen un mayor detalle de estos y otros parámetros en la elaboración de las cartas geográficas. En un elipsoide o esferoide se pueden diferenciar dos parámetros fundamentales, los semiejes (figura 1).

**Figura 1:** Parámetros del elipsoide, se aprecian los semiejes a y b.




A partir de ellos se pueden distinguir dos parámetros específicos:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (1)$$

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad (2)$$

Donde
*f = achatamiento*
*e = excentricidad*
*a = semieje mayor*
*b = semieje menor*

A partir de estos dos parámetros es posible establecer dos derivaciones adicionales:

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (3)$$

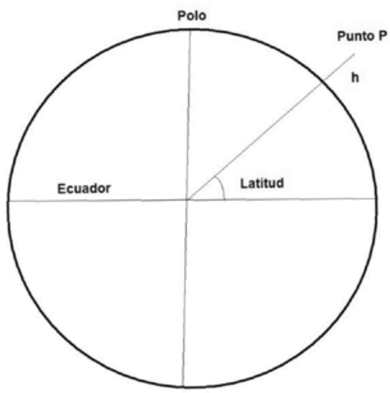
$$\sqrt{1 - e^2} = (1 - f) = \frac{b}{a} \quad (4)$$

De esta manera, un elipsoide puede ser completamente definido usando los parámetros *a* y *b*, o aquellos derivados de estos (ecuaciones 2, 3 y 4).

Para la esfera y el esferoide debe definirse un sistema de coordenadas que pueda ser adecuado para ambas figuras, estas coordenadas se definen a continuación:

- **Latitud:** el ángulo norte o sur desde el plano ecuatorial.

**Figura 2:** Definición de latitud con respecto a la esfera (la misma definición se mantiene para el esferoide).




- **Longitud:** el ángulo este u oeste desde un meridiano específico.

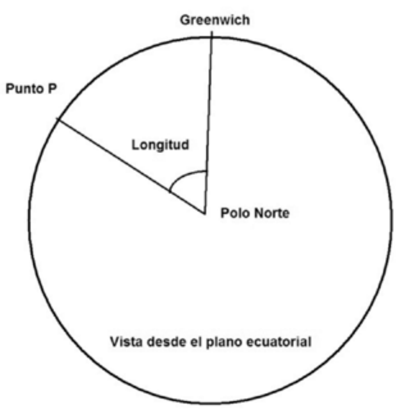



**Figura 3:** Definición de longitud con respecto a la esfera (la misma definición se mantiene para el esferoide).

- **Elevación:** una distancia sobre la superficie de la esfera.

La definición de latitud es natural, pues está definida físicamente por el ecuador, en tanto la definición de longitud es, en cierta medida arbitraria, sin razones físicas para escoger un meridiano particular (Iliffe & Lott, 2008). Un aspecto importante son los conceptos derivados de los términos de latitud y longitud:

- **Paralelos:** líneas de la superficie de la esfera o elipsoide paralelas al ecuador. Estas líneas son de igual latitud.
- **Meridianos:** líneas en la superficie de la esfera recorriendo de polo a polo. Estas son líneas de igual longitud.

Los paralelos y los meridianos se intersecan en 90°, y el conjunto de paralelos y meridianos es referido como cuadrícula. Cabe recordar que en cartografía matemática se definen algunos otros términos muy semejantes, como lo son: la latitud y la longitud astronómica, la latitud y la longitud geodésica, además de la latitud y la longitud isométrica. Estas definiciones y su utilización pueden ser consultadas en Snyder (1987), Bugayevskiy & Snyder (1995), Yang, Snyder & Tobler (2000), Hernández (2000) y Fenna (2007). Además, hay que considerar, que en la cartografía moderna se debe tomar en cuenta el uso de sistemas de coordenadas geocéntricas cartesianas, al utilizar observaciones satelitales (Iliffe & Lott, 2008). Las transformaciones entre coordenadas elipsoidales y geocéntricas se pueden dar de la siguiente manera:

$$X = (v + h) \cos \{ \cos n \quad (5)$$

$$Y = (v + h) \cos \{ \cos n \quad (6)$$

$$Z = (1 - e^2)\, v + f \operatorname{sen} \{ \quad (7)$$

*{ = es la latitud, norte positivo*
*m = es la longitud, este positivo*
*h = es la elevación elipsoidal (la elevación sobre la superficie elipsoidal)*
*v = es el radio de curvatura del elipsoide*

El cálculo inverso es también posible, en el cual las coordenadas elipsoidales son encontradas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas:

$$\tan m = \frac{Y}{X} \quad (8)$$

$$tan \, \{ = \frac{z + f\, b\, sen^3\, u}{p - e^2\, a\, cos^3\, u} \quad (9)$$

$$h = p \; sec \; \{ - v \quad (10)$$

a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente

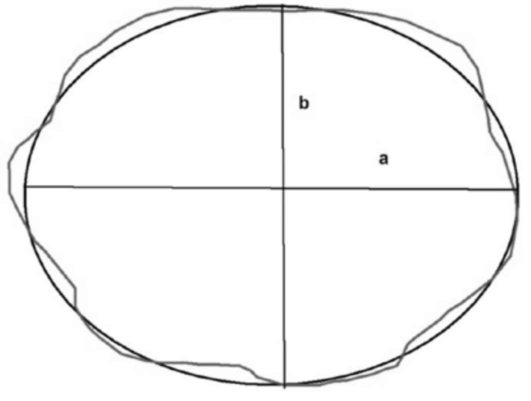
$$p = (X^2 + Y^2)^{1/2} \quad (11)$$

$$\tan u = \frac{Z}{p}\frac{a}{b} \quad (12)$$

$$f = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (13)$$

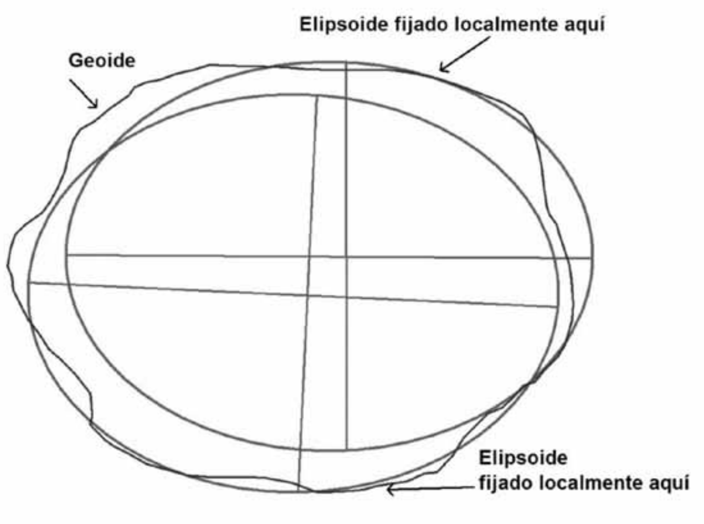
El geoide corresponde con la figura real de la Tierra, considerando sus características físicas, en tanto la esfera y el esferoide son los modelos o superficies utilizados en cartografía para mapear la superficie de la Tierra. Existe un factor que relaciona ambos conceptos y es el datum. Un datum es un parámetro cartográfico requerido para fijar un sistema de coordenadas a un objeto; para fines cartográficos ese objeto es la Tierra (Iliffe & Lott, 2008), aunque es aplicable para cualquier cuerpo celeste. La relación entre el geoide y el esferoide se visualiza de la siguiente manera:

**Figura 4:** Datum global mostrando la relación del elipsoide y del geoide.




Sin embargo, un datum global no siempre es el adecuado para cierta región, lo cual obliga a realizar una modificación del mismo, esto se hace mediante varias transformaciones, las cuales serán expuestas más adelante. El cambio del datum global lleva a lo que se denomina datum local.

**Figura 5:** Datum local donde se muestran diferentes fijaciones del elipsoide a puntos en el geoide.



El cambio de coordenadas entre sistemas de coordenadas basadas en diferentes datums implica ciertas transformaciones. Existen dos tipos de operaciones matemáticas:

- **Conversión:** la cual excluye cualquier cambio de datum.
- **Transformación:** incluye un cambio de datum.

Esta distinción entre ambas operaciones es útil, pues permite enfatizar la importancia de los datums en los procesos de transformación cartográfica (Iliffe & Lott, 2008). A continuación se examinarán los métodos de transformación entre sistemas de coordenadas geocéntricos:

- Transformación de Tres Parámetros: Es el más simple de los métodos de transformación y se usa como una primera aproximación (Iliffe & Lott, 2008).

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{destino} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{origen} + \begin{pmatrix} DX \\ DY \\ DZ \end{pmatrix}_{diferencia} \qquad (14)$$

DX, DY y DZ = son los parámetros geocéntricos para la traslación del origen al destino

- Transformación de Siete Parámetros: Las traslaciones requeridas a lo largo de los tres ejes geocéntricos pueden contabilizar cientos de metros, hasta un kilómetro en casos extremos (Iliffe & Lott, 2008). Esto generalmente cuenta para grandes cambios cuando ocurre una transformación de un sistema a otro. El Método de Tres Parámetros no toma en cuenta la desalineación de los ejes, que resultaría en cada sistema, haciendo una realización diferente del eje de giro, ni tampoco, el efecto de la propagación de diferentes longitudes estándar. De esta manera, se utiliza una transformación más precisa que cuenta y permite las rotaciones tridimensionales entre los sistemas de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{destino} = nR \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{origen} - \begin{bmatrix} DX \\ DY \\ DZ \end{bmatrix}_{diferencia} \qquad (15)$$

$$R= \begin{bmatrix} 1 & -a_z & a_y \\ a_z & 1 & -a_x \\ -a_y & a_x & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$R= \begin{bmatrix} 1 & a_z & -a_y \\ -a_z & 1 & a_x \\ a_y & -a_x & 1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Donde cada una de las matrices de rotación **R** indica una rotación positiva o negativa sobre el eje Z, respectivamente. Estas transformaciones también son conocidas como las Transformaciones de Bursa-Wolf.

- Transformación de Diez Parámetros: Se puede decir que si bien la Transformación de Siete Parámetros es más precisa, esta se halla sujeta a la geometría de la situación específica. Iliffe & Lott (2008) discuten con mayor detalle estos aspectos de la geometría. Un método alternativo que puede ser usado para solventar esta situación lo constituye el Método de Diez Parámetros, el cual se define de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{destino} = nR \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}_{origen} + \begin{bmatrix} DX \\ DY \\ DZ \end{bmatrix}_{diferencia} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$X_0$, $Y_0$ y $Z_0$ = son las coordenadas de un punto en el centro del área de estudio (origen)

Cuando la matriz de rotación usa la convención de la ecuación 17, este método se conoce como Molodensky-Badekas (Iliffe & Lott, 2008).

Con respecto a las transformaciones entre sistemas de coordenadas geográficas se puede mencionar el siguiente método:

- **Método de Molodensky:** Se entiende por un conjunto de ecuaciones para transformar un conjunto de coordenadas elipsoidales a otro. Los cambios en latitud, longitud y elevación elipsoidal $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ y $\Delta h$ se agregan a las coordenadas de origen para llegar al sistema de coordenadas de destino:

$$\begin{matrix} f\{p \\ m \\ h_{destino} \end{matrix} = \begin{matrix} f\{p \\ m \\ h_{origen} \end{matrix} + \begin{matrix} f^{D}\{p \\ Dm \\ Dh_{diferencia} \end{matrix} \qquad (19)$$

Una vez establecidos y discutidos algunos de los conceptos de esferoide y datum, en suma con sus métodos de transformación, es necesario comenzar con lo referente a las proyecciones geográficas y sus conceptos más importantes.

El sistema de coordenadas de referencia en la creación de las cartas geográficas es un conjunto de coordenadas relacionadas con un datum particular. De esta manera, se hace necesario considerar cómo organizar los datos de manera tal que se pueda construir una superficie plana, es decir, un mapa. Existen dos importantes razones para ello: la presentación de los datos como un documento de uso práctico en papel o digital (bidimensional) y la facilidad de guiarse en un espacio bidimensional (mapa), que en un espacio tridimensional (esferoide o esfera).

Una proyección se define como un sistema ordenado de meridianos y paralelos en una superficie plana (Pearson, 1990; Maling, 1993; Iliffe & Lott, 2008). Esta definición conlleva a la certeza de que es imposible convertir una esfera o un elipsoide, en una superficie plana sin que ocurra en el proceso una distorsión o corte, de esta manera, llega a la proyección. Los conceptos de distorsión están asociados a varios aspectos como lo son: la elipse de distorsión, también conocida como Indicatriz de Tissot (Maling, 1993; Feeman, 2000), la escala areal y la deformación angular (Maling, 1993).

Existen algunos conceptos fundamentales que es conveniente introducir, antes de definir los aspectos matemáticos en la construcción de las proyecciones (Snyder, 1987; Maling, 1993; Fenna, 2007; Iliffe & Lott, 2008), los cuales procederemos a mencionar de manera inmediata.

## 4. Grilla y cuadrícula

El conjunto de paralelos y meridianos que aparecen en el mapa se conocen como cuadrícula, siendo en algunos casos, no mostrada gráficamente en su totalidad, y en otros, aparece en las esquinas y como marcas dentro del documento cartográfico, como información marginal (Maling, 1993; Fenna, 2007; Iliffe & Lott, 2008). La cuadrícula no se considera la base del sistema de coordenadas del mapa para los diferentes propósitos computacionales, en su lugar, existe un sistema de referencia conocido como grilla que se encuentra sobrepuesto en el mapa, y está dado en coordenadas x, y, las cuales son denominadas este (E) y norte (N), frecuentemente.

## 5. Factor de escala

Las características de la superficie terrestre son sometidas a distorsiones cuando son proyectadas en un plano. Una manera de evaluar la distorsión es utilizando la siguiente ecuación:

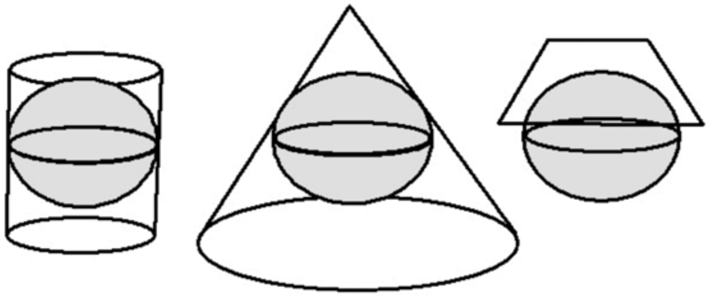
$$K = \frac{Dist.\ proyección}{Dist.\ elipsoide} \quad (20)$$

Este parámetro es diferente en cada proyección, y no está relacionado con la escala del mapa. El valor ideal del factor de escala es 1, lo cual indica que no hay distorsión, aunque debe aclararse que una distorsión no es un error en el mapa.

## 6. Superficies desarrollables

Históricamente, las proyecciones fueron derivadas al proyectar un elipsoide o esfera en una superficie intermedia, estas superficies se conocen en cartografía como superficies desarrollables (figura 6), en el sentido de que se pueden desplegar en forma de plana como los mapas, en contraposición evidente con la figura del planeta (esfera o elipsoide), que es una figura no desarrollable.

**Figura 6:** Superficies desarrollables para un elipsoide o una esfera.



Estas figuras o superficies desarrollables aluden al origen gráfico correspondiente al planeta, pero realmente son estrictas expresiones matemáticas. Entonces, es posible derivar un conjunto de fórmulas con el fin de convertir coordenadas geográficas en coordenadas de grilla, en términos estrictamente matemáticos, expuestos a continuación:

$$(E, N) = f\,(\{,\ {}^{m})\ (21)$$

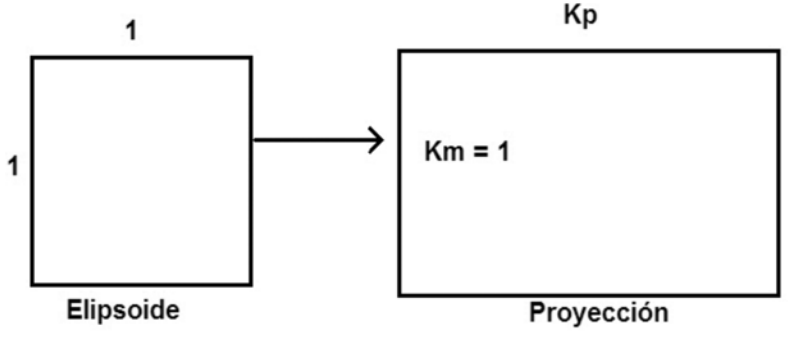
La fórmula anterior expresa cómo las coordenadas de grilla están en función de las coordenadas geográficas de latitud (φ) y de longitud (λ).

## 7. Características de preservación

Una vez seleccionada la superficie desarrollable, el siguiente paso es sugerir las reglas para la transformación de las coordenadas desde la esfera o esferoide. Teóricamente existen un sinnúmero de ellas, así que la escogencia dependerá del propósito de la proyección. Debe recordarse que no es posible obtener una proyección sin que haya algún tipo de distorsión. La forma, área y tamaño de las características de la superficie en la esfera o esferoide, serán diferentes cuando son proyectadas. Lo usual en cartografía matemática es preservar una de estas características a expensas de las otras (Pearson, 1990; Maling, 1993; Bugayevskiy & Snyder, 1995; Yang, Snyder & Tobler, 2000; Iliffe & Lott, 2008).

Podría requerirse que ciertas distancias medidas en el esferoide o en la esfera, puedan mantenerse sin distorsión en el documento cartográfico, a través de la proyección. Es obvio que no es posible preservar todas las distancias, sin embargo, se puede lograr que todas las distancias en los meridianos aparezcan sin distorsión. Esto se puede ver en la relación del factor de escala a lo largo de un meridiano que sea igual a 1 (km = 1) mostrado en la figura 7.

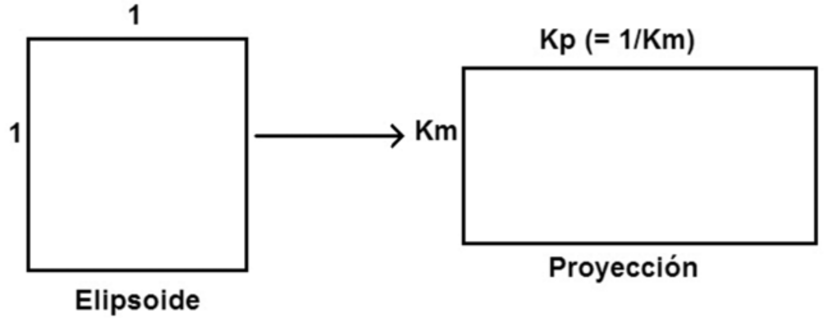
**Figura 7:** Proyección de una unidad cuadrada preservando las distancias a lo largo de un meridiano.




Una proyección que ejecute esta relación es llamada proyección equidistante, donde es notable que el factor de escala a lo largo de los paralelos (kp) es diferente de 1, ocasionando de esta manera, que tanto la forma como el área hayan sido modificadas.

Otra alternativa de proyección es aquella que obliga a preservar el área (figura 8) y que es nombrada como proyección equivalente o equiárea.

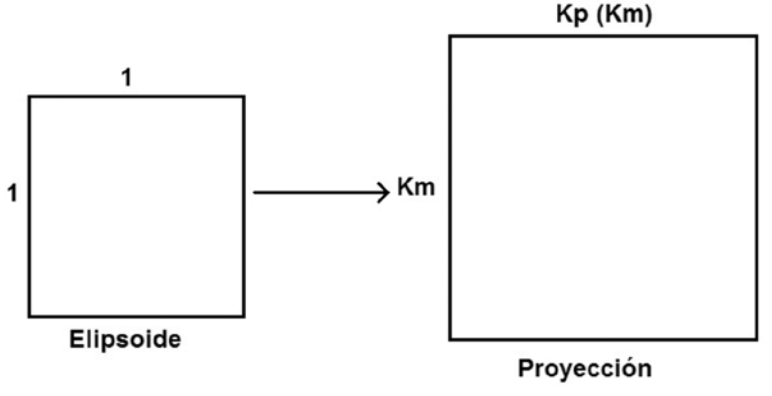
**Figura 8:** Proyección de una unidad cuadrada preservando el área.




En este caso, la relación del factor de escala es (km·kp = 1), que el área de la unidad cuadrada proyectada se mantiene igual a 1.

Otra opción de proyección es aquella en la cual se preserva la forma y es conocida como ortomórfica, o más comúnmente, como proyección conforme, la cual mantiene una relación de factor de escala (km = kp) donde se preserva la forma al mantener los ángulos (figura 9).

**Figura 9:** Proyección de una unidad cuadrada preservando la forma.




Al preservar el área, una proyección conforme u ortomórfica está preservando también los ángulos, a diferencia de las proyecciones equidistante y equivalente. Esto justifica el porqué las proyecciones conformes son de gran significancia en catastro y agrimensura, ya que los ángulos medidos en campo pueden ser transferidos a la proyección por medio de cálculos.

## 8. Proyecciones acimutales

Para las proyecciones acimutales, los paralelos son representados por círculos concéntricos, en tanto los meridianos son representados por líneas rectas, pasando a través del centro de los círculos, en ángulos iguales a la diferencia entre las correspondientes longitudes de los meridianos. En concordancia con esta definición, las ecuaciones generales pueden ser descritas de la siguiente manera:

$$x = t \text{ sen } a \quad (22)$$

$$y = t \cos a \quad (23)$$

$$t = f(z),\ a,\ z = \text{ángulos esferoidales}$$

Las proyecciones acimutales son generalmente usadas para diseñar mapas de pequeña escala, siendo en este caso la Tierra (u otro cuerpo) tomada como una esfera. El polo del sistema de coordenada es usado como polo geográfico para el aspecto normal o polar.

## 9. Proyecciones cilíndricas

La cuadrícula normal de las proyecciones cilíndricas tiene una forma simple, los meridianos son representados por líneas paralelas igualmente espaciadas, y los paralelos son líneas ortogonales a los meridianos. Pueden ser conformes, equivalentes o en algunos casos equidistantes, es así que la superficie será mapeada mediante una proyección cilíndrica, adquiriendo la forma de un elipsoide o esfera. Las direcciones básicas coinciden con los paralelos y los meridianos, por lo tanto, las escalas a lo largo de meridianos y paralelos son los valores extremos para cada punto. Las ecuaciones generales para las proyecciones cilíndricas elipsoidales normales tienen la siguiente forma:

$$x = bn \quad (24)$$

$$y = f(z) \quad (25)$$

b = radio de los paralelos estándar
z = latitud, m = longitud

## 10. Proyecciones cónicas

Las proyecciones cónicas, en su aspecto normal, son proyecciones en las cuales los paralelos son representados por arcos de círculos concéntricos, y los meridianos, por un conjunto de líneas rectas dibujadas desde el centro de los círculos. Los ángulos entre los meridianos en la proyección y en el elipsoide o esfera son proporcionales. Las ecuaciones generales son de la siguiente manera:

$$x = t \operatorname{sen} d \quad (26)$$

$$y = t_s - t \cos d \quad (27)$$

t = f (z), d = am
a = ángulo paramétrico en función de t

Las proyecciones cónicas pueden ser conformes, equivalentes y en algunos casos equidistantes.

## 11. Proyecciones perspectivas

En el análisis de las proyecciones existen ciertas propiedades perspectivas, que detallan aún más, el desarrollo de cartas geográficas construidas al desarrollar una esfera o un esferoide. Estas se definen como proyecciones gnomónicas, estereográficas y ortográficas.

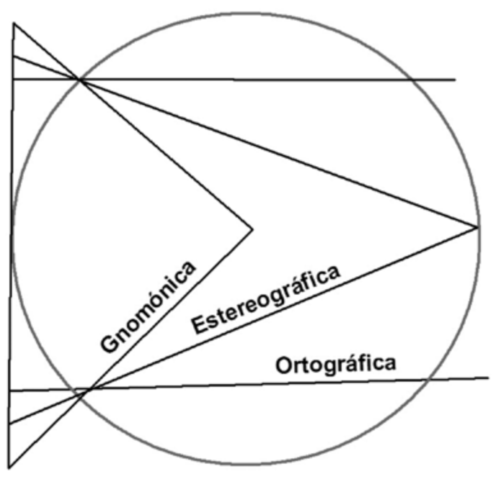
En la proyección gnomónica se considera un plano de proyección tangente a la superficie esférica, y el centro de proyección coincide con el centro de la esfera (figura 10). Dicha proyección puede ser ecuatorial, si el plano de proyección es tangente a la esfera en un punto del ecuador;

polar cuando el punto de tangencia es uno de los polos; u oblicua cuando el punto de tangencia no se encuentra en el ecuador ni en el polo.

En la proyección estereográfica se considera un plano de proyección tangente a la superficie terrestre, y el centro de proyección se halla en un punto diametralmente opuesto al punto de tangencia (figura 10). Al igual que la proyección gnomónica, esta proyección puede ser ecuatorial, polar u oblicua.

En el caso de la proyección ortográfica, esta se da cuando se considera un plano de proyección tangente a una esfera y un centro de proyección contenido en la perpendicular al punto de tangencia. A una distancia infinita, las proyectantes son líneas paralelas entre sí, en cuyo caso se tiene una proyección ortográfica u ortogonal, que también puede ser ecuatorial, polar u oblicua (figura 10).

**Figura 10:** Proyección perspectiva ecuatorial.



## Parámetros cartográficos de las Cartas Geográficas de Costa Rica relacionados con la cartografía matemática

**PARÁMETROS DE LOS ELIPSOIDES UTILIZADOS EN COSTA RICA**

| Parámetro | Elipsoide | |
|---|---|---|
| | Clarke 1866 | WGS 84 |
| Semieje mayor | 6378206.4 | 6378137 |
| Semieje menor | 6356583.8 | 6356752.314 |

**PARÁMETROS DE LA PROYECCIÓN CRTM (UTM O GAUSS - KRÜGER)**

| | |
|---|---|
| Meridiano Central | 84°00\` |
| Paralelo Origen | 0° |
| Paralelo Referencia | 10°00\` |
| Falso Este (m) | 500000 |
| Falso Norte (m) | 0 |

**PARÁMETROS DE LA PROYECCIÓN LCRN (PCCL)**

| | |
|---|---|
| Meridiano Origen | 84°20\` |
| Paralelo Origen | 10°28´ |
| Paralelo Referencia 1 | 09°56\` |
| Paralelo Referencia 2 | 11°00\` |
| Falso Este (m) | 500000 |
| Falso Norte (m) | 271820.522 |

**PARÁMETROS DE LA PROYECCIÓN LCRS (PCCL)**

| | |
|---|---|
| Meridiano Origen | 83°40\` |
| Paralelo Origen | 09°00´ |
| Paralelo Referencia 1 | 08°28\` |
| Paralelo Referencia 2 | 09°32\` |
| Falso Este (m) | 500000 |
| Falso Norte (m) | 327987.436 |

## REFERENCIAS

Amazigo, J. & Rubenfeld, L. (1980). *Cálculo Avanzado con Aplicaciones a la Ingeniería y a la Física*. México: McGraw Hill.

Ayres, F. & Mendelson, E. (2001). *Cálculo.* (4ta. edición). Bogotá: McGraw Hill.

Bugayevskiy, L. & Snyder, J.P. (1995). *Map Projections: A Reference Manual.* Londres: CRC Press.

Burden, R. & Faires, J. (2002). *Análisis Numérico*. México: Thomson Learning.

Feeman, T. (2002). *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps*. American Mathematical Society.

Fenna, D. (2006). *Cartographic Science: A Compendium of Map Projections, with Derivations.* Canmore: CRC.

Grafarend, E. & Krumm, F. (2006). *Map Projections: Cartographic Information Systems.* Springer.

Hernández, A. (2000 enero-junio). Proyecciones Cartográficas Conformes. *Revista Cartográfica,* Instituto Panamericano de Geografía e Historia, No. 70, p. 185.

Iliffe, J. & Lott, R. (2008). *Datums and Map Projections*. (2da. edición). Dunbeath: Whittles Publishing.

Maling, D.H. (1993). *Coordinate Systems and Map Projections.* Oxford: Pergamon Press.

Marsden, J. & Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial*. (3ra. edición). Wilmington: Addison-Wesley Iberoamérica.

Pearson, F. (1990). *Map Projections: Theory and Applications*. Boca Raton: CRC Press.

Presidencia de la República, Ministerio de Justicia, Ministerio de Obras Públicas y Transportes. (2007). *Decreto 33797 MJ-MOPT.* San José: La Gaceta Digital, p. 12.

Snyder, J.P. (1987). *Map Projections – A Working Manual*. USGS, Professional Paper 1395.

Snyder, J.P. (1993). *Flattening the Earth.* Chicago: The University of Chicago Press.

Spiegel, M. (1988). *Análisis Vectorial y una Introducción al Análisis Tensorial*. México: McGraw Hill.

Spiegel, M. (2001). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias*. México: McGraw Hill.

Tobler, W. (1961). *Map Transformation of Geographic Space*, Tesis Ph.D., University of Washington, p. 114.

Tobler, W. (1974). Local Map Projections. *The American Cartographer*, Vol. 1, No. 1.

Wilson, A. & Kirkby, M. (1975). *Mathematics for Geographers and Planners*. Glasgow: Oxford University Press.

Yang, Q.; Snyder, J.P. & Tobler, W. (2000). *Map Projections Transformations: Principles and Applications*. Londres: Taylor & Francis.