ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.1

UNICIENCIA Vol. 32, N° 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

Archivo complementario

Traducción en español

Este artículo debe ser referenciado de la siguiente manera:
Alfaro-Carvajal, C. & Fonseca-Castro, J. (2018). Problem solving in the teaching of differential and integral calculus in one variable: Perspective of mathematics teachers. *Revista Uniciencia*. 32(2), 42-56. Doi http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable: Perspectiva de los docentes de matemática

Cristian Alfaro-Carvajal
cristian.alfaro.carvajal@una.cr
http://orcid.org/0000-0003-2377-7181
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

Jennifer Fonseca-Castro
jennifer.fonseca.castro@una.cr
http://orcid.org/0000-0002-3947-1673
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

Resumen

Las líneas de investigaciones en resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas son muchas y con similitudes y discrepancias entre sí. En particular, lo que se entiende por resolución de problemas presenta diferencias entre la teoría y la práctica. En la enseñanza de la matemática superior, el cálculo diferencial e integral en una variable es un área rica para el uso de la resolución de problemas por sus contenidos y la cantidad de carreras universitarias que la incluyen en sus planes de estudios. Por esto se quiso indagar sobre el uso que le dan docentes de matemática a la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable. Para esto se aplicó un cuestionario a docentes con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable de la Universidad de Costa Rica, la Universidad Nacional, el Instituto Tecnológico de Costa Rica y la Universidad Estatal a Distancia. Los resultados revelan contradicciones entre las concepciones de docentes sobre lo que es un problema matemático y su implementación en el aula.

Palabras claves: Enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable; resolución de problemas; matemática superior; educación matemática.

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Sobre resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, son muchos los trabajos teóricos y de campo que se han realizado en las diferentes áreas de esta disciplina. Tras los amplios trabajos de Polya, Brousseau y Schoenfeld en resolución de problemas, muchas han sido las interpretaciones y usos que se le ha dado a esta teoría (Santos-Trigo, 2007).

En un estudio realizado por Törner, Schoenfeld y Reiss (2007), cuyo objetivo era documentar el "estado del arte" de la resolución de problemas en distintos países, confirmaron que, de una cultura a otra, los temas y definiciones relacionados con esta teoría son muy variados e, incluso, son distintos dentro de una misma cultura. Al respecto, Arcavi y Friedlander (2007) afirman que no existe consenso entre curriculistas, profesorado y personal investigador de matemática sobre lo que es un problema, o lo que implica la enseñanza en la resolución de problemas.

En el área del cálculo y el análisis, en particular, las investigaciones sobre resolución de problemas (Abarca, 2007; Cuevas y Pluvinage, 2009; Lois y Milevicich, 2008) se han concentrado en la búsqueda de estrategias metodológicas que permitan a cada dicente ir más allá de aprender algoritmos algebraicos, para alcanzar la conceptualización de los procesos subyacentes de los contenidos matemáticos. Las investigaciones en esta línea abordan diversos contenidos del cálculo diferencial e integral, utilizando distintas situaciones y contextos, así como recursos didácticos y tecnológicos. Por ejemplo, Lois y Milevicich (2008), en un curso de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina, incorporaron elementos tecnológicos e históricos en la enseñanza de la integral. Los autores diseñaron un paquete de software que permitió el abordaje del cálculo integral desde una perspectiva geométrica, atendiendo los procesos históricos en el desarrollo de este tema y estableciendo conexiones entre la conceptualización de integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería. Las actividades diseñadas por los autores promovieron en el estudiantado la experimentación, el análisis, la extrapolación, la argumentación, el intercambio de ideas, el compromiso y la discusión.

Por otra parte, Cuevas y Pluvinage (2009), en México, sugirieron un primer curso de cálculo basado en el desarrollo histórico, iniciando con el estudio de funciones reales tales como polinomiales, racionales, radicales, por partes y funciones trascendentes. Afirman que esta estructura les permitió introducir los conceptos del cálculo de una forma sencilla y gradual, sin tanta complejidad algebraica y numérica. Aseguran que esta metodología facilitó la modelación de situaciones reales sin tanta complejidad. Los autores diseñaron distintas actividades que simulaban situaciones reales en donde se lograba modelar una determinada función. Aquí, la herramienta tecnológica CalcVisual (Cuevas y Mejía, 2003) fue de gran ayuda para la simulación de las situaciones planteadas y para el estudio minucioso de dichas situaciones.

En Costa Rica, el Consejo Superior de Educación aprobó en 2012 los nuevos programas de estudio de matemáticas para la educación media, en los cuales la resolución de problemas ocupa un papel fundamental para la construcción de conocimientos matemáticos. Particularmente, se hace referencia al planteo y resolución de problemas en contextos reales que permitan la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (Morales-López, 2017). En este sentido, el Ministerio de Educación Pública de Costa

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Rica ha brindado capacitaciones para docentes de matemática de secundaria para favorecer el uso de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, a nivel superior, en la mayoría de los programas de cursos de cálculo diferencial e integral en una variable real de las universidades públicas costarricenses, se promueve la resolución de problemas como un medio para la construcción de conceptos; este enfoque está presente en la fundamentación teórica de los planes de estudios de formación de docentes de matemática.

Con las tendencias nacionales e internacionales cada vez más claras hacia una enseñanza enfocada en la resolución de problemas y los recursos existentes, sería obvio pensar en clases de matemáticas con metodologías distintas a la tradicional, cuyas actividades en el aula vayan dirigidas a la experimentación, exploración, argumentación, reflexión y discusión de conceptos y procedimientos matemáticos.

El cálculo diferencial e integral se encuentran entre los primeros cursos que llevan la mayoría de estudiantes a nivel de educación superior en Costa Rica. En la Universidad de Costa Rica, por ejemplo, al menos 25 carreras incluyen en sus planes de estudios cursos en la línea del cálculo diferencial e integral; y en la Universidad Nacional, al menos diez carreras. Esto, aunado a la naturaleza de los contenidos de esta área, hacen de estos cursos excelentes candidatos para el uso de resolución de problemas como estrategia metodológica en el desarrollo de los temas.

Existen evidencias que muestran que, para entender la resolución de problemas en la teoría y la práctica, es necesario primero entender y definir los elementos que la caracterizan (Santos, 2008). Es decir, se debe tener claro qué es un problema matemático, qué significa hacer matemática, qué se entiende por resolución de problemas y qué condiciones son necesarias para el logro de los objetivos de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Con base en el contexto anterior, surgió la necesidad de indagar sobre el uso que le da el personal docente de matemática a la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable; particularmente, conocer la perspectiva docente sobre lo que es un problema matemático, los objetivos y características de un problema matemático, y su práctica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable. Para esto, se aplicó un cuestionario a docentes de matemáticas con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable de cuatro de las cinco universidades estatales costarricense: Universidad Nacional (UNA), Universidad de Costa Rica (UCR), Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y Universidad Estatal a Distancia (UNED).

Se espera que los insumos acá presentados sirvan para que, eventualmente, se generen acciones que den respuesta a las necesidades detectadas con esta población.

Marco teórico

La resolución de problemas ha servido de "paraguas" bajo el cual se han realizado diferentes investigaciones en distintas direcciones (Schoenfeld, 1992): desde la elaboración de actividades que permitan el desarrollo cognitivo y de destrezas matemáticas, hasta el uso de la resolución de problemas para explicar el desarrollo del pensamiento matemático del estudiantado (Santos, 2008). El problema radica en que la mayoría de las teorías emergentes de estas investigaciones no explican de manera amplia los procesos

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

que involucran el desarrollo de conceptos o habilidades básicas, o cómo se relacionan estos con la resolución de problemas. Las distintas teorías, en su mayoría, son "recicladas" sin una debida revisión de sus limitaciones o alcances (English, Lesh y Fennewald, 2008).

En relación con la puesta en práctica y el diseño curricular en la resolución de problemas, igualmente, no existe consenso. No está claro, aún, cuáles son los contenidos fundamentales o cómo se deben estructurar estos en términos de actividades de resolución de problemas; menos todavía cómo hacer visible esta teoría en las propuestas educativas (Santos, 2008). El autor afirma: "el reconocimiento de que pueden existir varios caminos para organizar una propuesta del currículum que promueva la resolución de problemas implica la necesidad de explicitar cómo los principios de esta perspectiva se distinguen en la organización y estructura de los contenidos" (Santos, 2008, p. 18). Así, el reto consiste en generar condiciones para el estudiantado, de manera que vean en estas oportunidades para investigar varios caminos de solución y extender o formular otros problemas.

Por tanto, es necesario entender y definir los componentes fundamentales que distinguen esta teoría; es decir, se debe tener claro qué es un problema matemático; qué significa hacer matemática, qué se entiende por resolución de problemas y qué condiciones son necesarias para el logro de los objetivos de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué es un problema matemático y qué significa hacer matemática?

Existen variadas y, algunas veces, contradictorias definiciones de lo que es un problema matemático.

Por mucho tiempo se pensó en un problema matemático como una situación desconcertante y difícil que requería de procedimientos y cálculos matemáticos para poder darle solución. Esta se caracterizaba por tener una única respuesta (Schoenfeld, 1992).

Con los muchos esfuerzos en investigaciones, esta definición ha evolucionado a una más dinámica que involucra distintos procesos cognitivos, contextos, habilidades, entre otros. Particularmente, resulta interesante el planteamiento de Mason (2016), quien considera que la situación planteada puede o no representar un problema matemático para el estudiantado, dependiendo de cuándo y cómo se utilice este en el proceso de enseñan y aprendizaje.

Un problema matemático se entiende como una situación planteada que le permite al estudiantado aprender un nuevo concepto (Brousseau, 1986), a través de tareas "significativamente" diferentes a las rutinarias, donde el reto consiste en decidir cómo abordar el problema y qué tipo de conocimiento o recurso matemático utilizar (Burkhardt y Bell, 2007; Santos-Trigo, 2007). La situación debe permitirle pensar matemáticamente mediante procesos de discusión, negociación, especulación acerca de los posibles ejemplos y contraejemplos que le ayudan a confirmar o rechazar una idea (Santos-Trigo, 2007; Schoenfeld, 1985).

Desde esta concepción de lo que es un problema matemático, lo que se entiende por "hacer matemática" toma otro rumbo. El National Research Council (1999) define el proceso de "hacer matemáticas" como la actividad que "involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados" (p. 31). Estos patrones pueden ser numéricos, de razonamiento y comunicación, patrones de movimiento y

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

cambio, entre figuras o formas geométricas, patrones de simetría y regularidad y patrones de posiciones (Devlin, 1996). Pueden, además, ser reales o imaginarios, visuales o mentales, dinámicos o estáticos, cualitativos o cuantitativos, de interés utilitario o de carácter recreativo. El referente de estudio de estos patrones puede ser el mundo que nos rodea o una reflexión pura de la mente del individuo (Santos, 2008).

¿Qué se entiende por resolución de problemas?

Así como existen distintas e incoherentes definiciones de lo que es un problema matemático, así existen percepciones de lo que significa y para lo que sirve la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Santos-Trigo, 2007).

Un tanto descontinuado en el discurso de docentes de matemática, pero aún presente como una realidad para el estudiantado, está la resolución de problemas equivalente a resolver listas de ejercicios ya discutidos en clase, los cuales requieren el empleo de algoritmos y explicaciones brindadas por su docente.

No obstante, las tendencias actuales indican que resolver un problema, desde el nuevo entendido de lo que es un problema matemático, debe implicar otro tipo de actividades mentales de mayor exigencia, orientadas al protagonismo estudiantil en la búsqueda de soluciones (Benítez y Benítez, 2013).

Stanic y Kilpatrick (1989) reconocen tres propósitos de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: (a) como contexto, para estimular y motivar al estudiantado y lograr el aprendizaje de conceptos; (b) como una habilidad en sí misma que se debe enseñar en el currículo; o (c) como medio para "hacer matemática".

Puig (1998) caracteriza el proceso de resolución como "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (p. 31).

Lesh y Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas" (p. 782, citado por Santos, 2008). Lo anterior sugiere ciclos de reflexión, definición y revisión de ideas y conceptos por parte del estudiantado. Para estos autores, la meta final de resolver el problema no es la respuesta, sino "identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema" (Santos, 2008, p. 4).

Por otro lado, Arcavi (2000) afirma que la resolución de problemas es la actividad que "conlleva al desarrollo o construcción de un pensamiento inquisitivo donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan el uso y formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina" (p. 19). Así, la resolución de problemas debe permitir al estudiantado formular preguntas, identificar conjeturas o relaciones, y sustentar y comunicar resultados. Estas actividades deben desarrollarse dentro de una comunidad de aprendizaje donde el trabajo individual y colaborativo es valorado.

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

¿Qué condiciones son necesarias para el logro de los objetivos de la resolución de problemas?

De lo anterior se deduce que para un proceso de resolución de problemas visto como una habilidad en sí misma, es necesario, entre otras cosas, el conocimiento del contenido matemático y de estrategias de resolución de problemas, de un plan claro de auto-monitoreo, y una disposición proactiva a plantear y resolver problemas.

Al respecto, el National Council of Teachers of Mathematics (2000) afirma:

> La enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesores, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y actitudes en sus estudiantes. ... La enseñanza en sí misma es una actividad de resolución de problemas (p. 341).

Según Schoenfeld (citado por Abarca, 2007), para que el estudiantado aprenda a hacer matemática es necesario un ambiente o situación donde se promueva esas formas de pensar. De acuerdo con el autor, cada situación planteada debe simular un quehacer real donde los conocimientos y habilidades matemáticas son imprescindibles, pero no únicos, en la búsqueda de soluciones del problema. Al respecto, el autor propone cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas: (a) dominio del conocimiento, para fundamentar es necesario que el estudiantado posea conocimientos matemáticos previos y actuales; (b) estrategias cognoscitivas, incluyendo la descomposición de un problema en casos más simples, invertir un problema, dibujar un diagrama, entre otros; (c) estrategias meta-cognoscitivas, relacionadas al monitoreo de los procesos empleados al resolver un problema; y (d) sistema de creencias, incluye las ideas estudiantiles acerca de las matemáticas y cómo resolver problemas, sus miedos y temores.

Los problemas planteados deben proporcionarle al estudiantado un sentido de la disciplina—de su campo de acción, de su potencia, de su historia—deben generarle un sentido de lo que son las matemáticas y cómo se hace matemáticas, a un nivel acorde a su entendimiento y experiencia.

Lesh, Doerr, Cramer, Post y Zawojewski (2003), por su parte, definen seis principios fundamentales para la elaboración de problemas matemáticos: (a) el principio del significado personal, la situación planteada debe representar una situación real, familiar para el estudiantado, que le estimule a trabajar en ella; (b) el principio de construcción de un modelo, la tarea planteada debe generar en el estudiantado la necesidad de construir, refinar, extender o modificar un modelo; (c) el principio de auto-evaluación, la situación debe permitir al estudiantado juzgar por sí mismo sus respuestas y procedimientos; (d) el principio de externalización del modelo, debe generar en el estudiantado la necesidad de documentar sus ideas y avances; y (e) el principio del simple prototipo, la situación debe ser simple pero debe generar la necesidad de un modelo matemático significativo cuya solución sirva de prototipo para otras situaciones.

Un elemento fundamental por considerar en la resolución de problemas es la incorporación y uso de los recursos tecnológicos. Mucho se ha mencionado sobre la alfabetización tecnológica y la necesidad de que los contenidos de tecnología sean proporcionados por docentes que enseñan disciplinas científicas, y que esos contenidos no

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

deben ser presentados en cursos específicos de tecnología, sino de forma transversal e integrada (Lois y Milevicich, 2008). Sin embargo, poco se ha visto en relación con este cambio metodológico en la enseñanza de las matemáticas (Lois y Milevicich, 2008). El Banco Interamericano de Desarrollo (2006) atribuye lo anterior a los insuficientes planes institucionales que existen para apoyar dicha reforma, a los elevados precios de acceso a las TIC y a la falta de educación digital para interactuar con las TIC. Santos-Trigo (2016) agrega la importancia de considerar las formas de razonamiento que se activarán en el estudiantado con el uso de la tecnología en los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos, mediante la resolución de problemas.

El rápido desarrollo de lo tecnológico, el internet y los recursos en línea, cambia la naturaleza de las herramientas disponibles y su uso para hacer y aprender matemáticas. En consecuencia, hace falta repensar las situaciones matemáticas (Trouche, 2009). Los "laboratorios matemáticos" como recurso para la indagación y creación de redes de clase, permiten la articulación, la investigación y construcción en la práctica matemática. El uso de herramientas de visualización, simulación, cálculo y representación abre la posibilidad a la experimentación, al dialogo, al debate y cambia la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas (Trouche, 2009).

En la resolución de problemas, el empleo de herramientas computacionales no solamente puede facilitar la implementación de las estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas (Santos-Trigo, 2007). En este contexto, el uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas y como consecuencia incide en el desarrollo de una teoría que explique las competencias estudiantiles. Moreno-Armella y Santos-Trigo (2008) establecen que el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias del estudiantado y, como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

Se pueden definir tres vertientes en la utilización de los TIC en la Educación Superior: (1) como medio de enseñanza, (2) como medio de aprendizaje, y (3) como medio de investigación y resolución de problemas reales (Hernández, Delgado, Fernández, Valverde y Rodríguez, 2001). Los medios de aprendizaje apoyados en el uso de software específico enriquecen el proceso de exploración, elaboración de algoritmos y formación de habilidades lógicas, y son más flexibles que los medios tradicionales (pizarra, equipos de video, etc.). Como medio de investigación y resolución de problemas, facilita la combinación de los componentes académico e investigativo, los conceptos a aprender y la forma de llevarlo a cabo (Lois y Milevicich, 2008).

El uso de las tecnologías como estrategias de mediación permiten al personal docente ejercer un papel de orientador, de motivador y estimulador del aprendizaje, asistiendo al alumnado en tareas de razonamiento y búsqueda (Lois y Milevicich, 2008). A su vez se fortalece la relación entre docente y estudiante, acercándola más a la de "coinvestigación" y "coaprendizaje" (Valverde y Garrido, 1999).

El cálculo y su enseñanza

Las diferentes investigaciones que abordan la enseñanza y aprendizaje del cálculo dejan en evidencia la existencia de un

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

"modelo tradicional de enseñanza del cálculo", en el cual los contenidos son estructurados como una secuencia de definiciones, teoremas y demostraciones lógicamente organizados, de tal manera que los conceptos y procedimientos anteriores son necesarios para los siguientes (Salinas y Alanís, 2009). Incluso los libros de textos más populares en cálculo muestran ese tipo de estructura.

En este modelo de enseñanza se hace necesario enseñar el tema de límites antes de enseñar derivadas, funciones antes de límites y así sucesivamente; y los capítulos de aplicaciones se desarrollan al final de cada tema para aplicar o reproducir lo aprendido (Salinas y Alanís, 2009).

En consecuencia, se tiene un aprendizaje sin comprensión y altos índices de reprobación, así como actitudes negativas del estudiantado hacia el aprendizaje de las matemáticas (Salinas y Alanís, 2009). El estudiantado puede, en el mejor de los casos, derivar e integrar, pero no es capaz de dar sentido a esas nociones en la resolución de problemas (Cantoral y Mirón, 2000).

Los esfuerzos por una "reforma" en la enseñanza del cálculo han logrado poner en discusión aspectos relacionados con el qué enseñar (el contenido) versus cómo enseñar (el contexto) (Steen, 2003).

En el primero, se discute sobre los enfoques que favorecen los algoritmos y procedimientos (tecnicismo) versus los que favorecen los enfoques formales y teóricos (teoricismo). El tecnicismo asume que enseñar matemáticas es enseñar técnicas algorítmicas, y así queda resuelta la actividad de resolución de problemas. Por su parte, el teoricismo plantea que enseñar matemáticas es mostrar teorías cristalizadas, y asume que la forma en que la teoría se presenta es como se aprende (Gascón, 2001).

Sin embargo, cada uno por separado no parece estar dando los resultados esperados (Artigue, 2001). Gascón (2001) asegura que para el estudiantado existen grandes dificultades en usar adecuadamente un teorema, aplicar una técnica o comprender si un objeto cumple una definición. De igual manera, con el tecnicismo, los estudiantes y las estudiantes «tienden a olvidar los ‹auténticos› problemas, esos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una ‹estrategia de resolución›» (Gascón, 2001, p. 136).

Según Cantoral, Cordero, Farfán e Imaz (1990), la estructura del discurso matemático teórico constituye la base menos propicia para comunicar las ideas del cálculo; pero aclaran que no están a favor de la enseñanza de técnicas para aligerar conocimientos o emplear rutinas.

Sobre el cómo enseñar, diferentes corrientes educativas han dirigido las investigaciones en esta línea. La corriente histórico-epistemológica, por ejemplo, trata de rescatar el papel de la matemática como actividad humana que se relaciona con la necesidad de dar solución a problemas reales; aquí la enseñanza del cálculo que utiliza la historia como herramienta didáctica toma protagonismo para dar sentido al aprendizaje de dicentes.

La corriente tecnológica en educación también ha tenido sus aportes en la enseñanza del cálculo. Actividades didácticas alrededor de software dirigidos al estudio del cálculo han generado sus aportes a la enseñanza y aprendizaje de esta área. Sin embargo, su uso ha sido limitado en comparación con su potencial. En algunos casos, este se reduce a mostrar lo mismo, pero de otra forma (Salinas y Alanís, 2009).

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Asimismo, la resolución de problemas, el aprendizaje colaborativo, la utilidad instrumental del conocimiento matemático, entre otros, son acciones que se han utilizado en los esfuerzos por un cambio en la enseñanza del cálculo.

No obstante, Salinas y Alanís (2009) afirman que la mayoría de estos esfuerzos, si bien permiten introducir los temas e intentan involucrar al estudiante en el proceso de aprendizaje, terminan predisponiendo al estudiantado sobre el contenido matemático en su versión formal.

Metodología

Esta investigación está dentro de la modalidad de investigación cualitativa, puesto que busca determinar la perspectiva del personal docente de matemática universitario sobre el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable a nivel de la educación superior.

El objetivo es dar un panorama general de la perspectiva docente con experiencia en la enseñanza del cálculo sobre el uso de la resolución de problemas en el desarrollo de sus lecciones, sin generalizar resultados u opiniones.

Por este motivo, las técnicas e instrumentos de recolección de datos fueron diseñados a partir del enfoque cualitativo, de manera que los datos recolectados permitieran la descripción y la explicación de los objetivos de este trabajo.

Participantes

Se contó con un total de 58 docentes de las Escuelas o Departamentos de Matemáticas de la UCR, UNA, ITCR y UNED. Las universidades participantes son universidades públicas con la mayor cantidad de años de vigencia en el país y con una alta experiencia en la formación de profesionales en diversas carreras.

Para la escogencia de docentes, se consultó a las autoridades de cada escuela, las cuales facilitaron una lista con los nombres de sus docentes que, según su criterio, podrían dar aportes significativos a esta investigación. Dentro de los criterios que utilizaron para dicha selección fueron: con al menos un año de experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable, evaluaciones docentes de estudiantes con resultados satisfactorios, experiencia en la coordinación de las cátedras de cálculo diferencial e integral, entre otros.

El personal docente participante, al momento de la investigación, había impartido cursos en la línea del cálculo diferencial e integral en una variable para la carrera de Enseñanza de la Matemática o para otras carreras en alguna de las universidades antes mencionadas. En promedio, tenían 11 años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Además, contaban con grados académicos de Licenciatura, Maestría o Doctorado en áreas tales como: enseñanza de la matemática, matemática educativa, matemática pura, informática educativa, estadística, actuariado y didáctica de la matemática.

Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Se administró un cuestionario a los sujetos participantes con el objetivo de determinar su perspectiva sobre la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

diferencial e integral en una variable a nivel de la educación superior; este se aplicó en el segundo ciclo del 2015.

Este incluía preguntas abiertas, cerradas, de ordenación y con escala de Likert. El instrumento se validó con expertos y con una pequeña muestra de docentes de matemática con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral que no fueron considerados en la muestra principal. Estos aportaron sugerencias y observaciones que depuraron la versión inicial del instrumento.

El cuestionario se aplicó de forma digital utilizando la plataforma de la Universidad Nacional y el software LimeSurvey con la licencia respectiva de dicha institución.

Criterios para el análisis de la información

Para el análisis de la información, se crearon dos categorías: (a) Perspectivas de docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características; (b) Perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

En las preguntas cerradas del cuestionario, el software LimeSurvey presentó los resultados mediante frecuencias relativas y absolutas. En las preguntas abiertas desplegó una lista con las respuestas brindadas por los sujetos participantes, se consideró cada respuesta.

En las preguntas de ordenación se brindó un enunciado al docente seguido de cinco proposiciones las cuales se esperaba que cada participante ordenara de mayor a menor según estas se alejaran o acercaran a lo que pensaba—1 para el valor que más se aleja y así sucesivamente hasta 5 para el que más se aproximaba. Para el análisis de estas preguntas, se sumaron, para cada proposición por pregunta, el total de respuestas a las opciones 4 y 5 (Total A, total que más se acercan), y el total de respuestas a las opciones 1 y 2 (Total B, total que más se alejan). Seguidamente, se restó el Total A y el Total B (Diferencia). Finalmente, se ordenaron las proposiciones de mayor a menor según el resultado obtenido en la diferencia. Esto permitió obtener las proposiciones, que en general, se acercan más a las opiniones de docentes. La opción 3 no fue considerada para efectos del ordenamiento.

En las preguntas que incluían escala de Likert, se propuso un número de proposiciones con el objetivo que cada docente indicara su grado de aceptación hacia estas en una escala de 1 a 5. Para el análisis de estas preguntas, se sumaron, para cada proposición por pregunta, el total de respuestas a las opciones 3, 4 y 5 (Total a favor), y el total de respuestas a las opciones 1 y 2 (Total en contra). Estos totales (a favor y en contra) sirvieron para considerar o refutar una proposición en el análisis.

Análisis de los resultados

En relación con qué es un problema matemático, 42 docentes de matemática participantes consideran la siguiente definición como la que más se aproxima a su concepción: *"Una situación que provee al estudiante la posibilidad de discusiones y descubrimientos relacionados con algún tema"*. Mientras que 14 docentes no estuvieron de acuerdo con esta definición.

A esta definición agregan las siguientes: *"Una situación que motiva al estudiante a aprender nuevos conceptos o procedimientos"* y *"una situación contextualizada*

UNICIENCIA Vol. 32, N° 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

en la que el estudiante puede aplicar un concepto o un procedimiento matemático a una situación real".

Diecinueve docentes consideraron que un problema matemático es: *"Una situación que le permite al estudiante demostrar si ha aprendido un concepto o un procedimiento"*. No obstante, 36 estuvieron en contra de tal definición. Por lo tanto, la definición anterior podría considerarse como la que más se aleja de lo que es un problema matemático. Estuvieron también en desacuerdo con la siguiente definición: "*Una situación que le permite al estudiante desarrollar nuevas habilidades"*.

Sobre los objetivos de un problema matemático en un curso de cálculo diferencial e integral en una variable, 46 docentes consideran que estos deben ser utilizados, principalmente, para el desarrollo de habilidades que permitan establecer conjeturas y resultados matemáticos; así como para propiciar el interés y la motivación estudiantil en los temas a desarrollar. Solo cuatro participantes no lo consideraron así. Mencionaron en segunda instancia la pluralidad de soluciones para promover la discusión entre estudiantes, y el desarrollo de habilidades en la demostración de resultados utilizando la teoría estudiada.

En cuanto a las características que debe tener un problema matemático, el personal docente hizo énfasis a tres componentes: el contexto o situación planteada en el problema matemático, los procesos involucrados en la búsqueda de la solución al problema y la solución misma del problema. Al respecto indican:

- Sobre el contexto del problema: debe ser una situación contextualizada en la que el estudiantado no puede encontrar la respuesta inmediatamente y le implique un esfuerzo cognitivo para la construcción de nuevos conocimientos. Debe tener sentido para el estudiantado y sentido dentro de la disciplina de estudio; tiene que representar un reto para el estudiantado de manera que le permita generar relaciones entre conceptos y procedimientos. Debe ser diferente a la lista de ejercicios de aplicación de conceptos o algoritmos.
- Sobre los procesos que involucra la resolución del problema: debe favorecer la toma de decisiones, la discusión entre pares, el desarrollo de habilidades matemáticas, la aplicación de conceptos, el razonamiento no lineal y la interpretación de datos. Asimismo, debe permitir la aplicación de varias áreas de conocimiento, no solo el área que es objeto de estudio. Debe requerir de conocimientos previos y de investigación por parte del estudiantado; y que evalúe los conocimientos estudiados.
- Sobre la solución del problema: debe tener solución y resolverse de diferentes maneras.

El personal docente consultado afirma hacer uso de la resolución de problemas en el desarrollo de sus clases de cálculo diferencial e integral en una variable. Destaca, particularmente, tres formas de hacerlo: (a) 59 docentes afirman utilizarla al finalizar el desarrollo de un concepto matemático para la aplicación de la teoría, (b) 57 la utilizan antes de desarrollar un concepto matemático como motivación, y (c) 40 la usan para construir o ilustrar algún concepto matemático.

Para el primero, el personal docente menciona los problemas de optimización al finalizar el tema de derivadas para la aplicación de la teoría aprendida, o los problemas de sólidos de revolución para la aplicación de

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

integrales. El cálculo de áreas bajo curvas lo nombran como ejemplos de problemas que les permiten introducir el tema de integrales. No obstante, ningún docente citó un problema o ejemplo específico del tercer uso.

Catorce docentes afirman no dar ningún papel a la resolución de problemas dentro de sus cursos.

Seis docentes mencionan otros usos de la resolución de problemas en sus lecciones, pero no brindaron detalles o ejemplos de cómo lo hacen. Por ejemplo, afirman utilizar la resolución de problemas como una forma de trabajar la historia de la matemática al tratar un concepto determinado; o como problema abierto que permita a sus estudiantes ampliar sus conocimientos sobre los procedimientos y algoritmos desarrollados en la clase.

Conclusiones

En síntesis, se tiene que en cuanto a la perspectiva de qué es un problema matemático, el grupo de docentes participantes se muestra más cercano a la visión de resolución de problemas como una forma de hacer matemáticas y no tanto como un medio para evaluar conocimientos adquiridos. Para los sujetos participantes, la resolución de problemas en un curso de cálculo diferencial e integral en una variable tiene como objetivo fundamental el desarrollo de habilidades para establecer conjeturas y resultados matemáticos que favorezcan el interés y la motivación estudiantil en los temas a desarrollar y promuevan la pluralidad de soluciones y la discusión entre estudiantes. Lo anterior concuerda con las investigaciones hechas por Stanic y Kilpatrick (1989).

A pesar de que se muestran cercanos a la conceptualización de resolución de problemas como una forma de hacer matemáticas, muchas de las características de un problema matemático que enuncian son contradictorias con tal conceptualización. Esto reafirma el hecho de que no hay un consenso sobre lo que debe ser un problema matemático.

En cuanto a la puesta en práctica de la resolución de problemas en los cursos de cálculo diferencial e integral, en una variable en el aula, realizada por el personal docente participante, es opuesta a la conceptualización que manifiestan. La mayoría de participantes afirma utilizarla al finalizar el desarrollo de un concepto matemático para la aplicación de la teoría, lo que concuerda con el modelo tradicional de enseñanza que mencionan Salinas y Alanís (2009). Otro grupo, como motivación antes de desarrollar un concepto matemático; y solo unos cuantos afirman usarla como herramienta metodológica para construir conceptos matemáticos.

Si bien se puede entender la resolución de problemas como contexto y medio de motivación para el estudio de un concepto de matemático, como una forma de hacer matemáticas o como una forma de adquirir diversas habilidades en sí mismas, los resultados de esta investigación reafirman que no existe coherencia entre la conceptualización teórica sobre resolución de problemas y su puesta en práctica.

Estos resultados son preocupantes si se miran a la luz de las necesidades del país y los enfoques de enseñanza promovidos por las universidades estatales.

Es necesaria la generación de proyectos de investigación en miras de encontrar coherencia entre las concepciones existentes sobre resolución de problema y su puesta en práctica en la clase de matemática. Es importante que tales investigaciones permitan el uso de la resolución de problemas en la

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

construcción de conceptos matemáticos en áreas específicas y que sirvan de base en la formulación de otras propuestas.

Serían útiles, también, los espacios para la difusión y revisión de dichas propuestas para la capacitación de docentes, de manera que conozcan, analicen y selecciones actividades en temas específicos que les permitan la enseñanza desde el enfoque de resolución de problemas.

Reconocimientos

La investigación que fundamenta los resultados de este artículo forma parte del proyecto SIA 0128-14, denominado *La resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional*, el cual está inscrito en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

Referencias

Abarca, N. (2007). La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora. *Revista Tecnociencia Universitaria Bolivia [online], 5,* 14-20.

Arcavi, A. (2000). Problem-driven research in mathematics education. The *Journal of Mathematical Behavior, 19(2),* 141-173. doi https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00042-0

Arcavi, A. y Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: The case of Israeli elementary school projects. *ZDM, 39(5-6),* 355-364. doi https://doi.org/10.1007/s11858-007-0050-3

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 207-220). Holland: Kluwer Academic.

Banco Interamericano de Desarrollo. (2006). Conectando a la mayoría, lineamientos estratégicos para la difusión de las tecnologías de información y comunicación para el desarrollo. *Recuperado de http:// www.iadb.org/sds/doc/conectandoalamayoria.pdf*

Benítez, S., y Benítez, L. (2013). La resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En E. Rodríguez (Ed.), *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 3206). Uruguay: SEMUR.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Burkhardt, H. y Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM, 39(5-6),* 395-403. doi https://doi.org/10.1007/s11858-007-0041-4

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., e Imaz, C. (1990). Cálculo–análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán y C. Imaz (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 55–69). México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3),* 265–292.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003). *Cálculo visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *El c*álculo y su enseñanza, *1*. D.F., México: Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional.

Devlin, K. (1996). *Mathematics: the science of patterns, the search for order in life, mind and the universe*. New York: Scientific American Library.

English, L., Lesh, R. y Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problema solving research and curriculum development. En *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education.*

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56, Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1)*, 129–159.

Hernández, H., Delgado, J., Fernández, B., Valverde, L., y Rodríguez, T. (2001). *Cuestiones de didáctica de la matemática: Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., y Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 211-233). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lois, A. E. y Milevicich, L. M. (2008). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación, 47(5),* 1-15.

Mason, J. (2016). When is a problem…? “When” is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (pp. 263-286). Springer: International Publishing.

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En A. Ruiz (Ed.), *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean* (pp. 39–56). Springer International Publishing. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-44177-1_3. doi https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_3.

Moreno-Armella, L. y Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (p. 319). New York: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics* (Vol.1). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council. (1999). *Improving Student Learning: A strategic plan for education research and its utilization*. Washington, DC: National Academic Press.

Puig, L. (1998). Réplica a elementos de resolución de problemas, cinco años después de Ma Luz Callejo y José Carrillo. En J. R. Pascual (Ed.), *Actas del Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-112. Pamplona: Universidad Pública Navarra.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3),* 355-382.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en Educación Matemática, xii,* 159-192.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM, 39(5- 6),* 523-536. doi https://doi.org/10.1007/s11858-007-0057-9.

Santos-Trigo, M. (2016). Problem solving in mathematics education. En P. Liljedahl, M. Santos-Trigo, U. Malaspina y R. Bruder (Eds.), *Memorias del 13th. International Congress on Mathematical Education* (pp. 19-30). Alemania: Springer Open.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 334-370. NY: Macmillan.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. *3*, 1-22.

Steen, L. A. (2003). Analysis 2000: challenges and opportunities. En D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson y G. Schubring (Eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: Moments of mathematics education in the twentieth century* (Monografía No. 39, pp. 191–210). Genova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr

ISSN Electrónico: 2215-3470
DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Törner, G., Schoenfeld, A. H., y Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the World: Summing up the state of the art. *ZDM, 39(5-6),* 353-353. doi https://doi.org/10.1007/s11858-007-0053-0.

Trouche, L. (2009). Recursos para procesar, aprender, enseñar el cálculo: Nuevos modos de concepción y difusión. *Revista El Cálculo y su enseñanza, 2*. D.F., México: Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional.

Valverde, J., y Garrido, M. (1999). El impacto de las tecnologías de la información y la comunicación en los roles docentes universitarios. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado, 2(1),* 543-554.

UNICIENCIA Vol. 32, N°. 2, pp. 42-56. Julio-Diciembre, 2018 • URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • Correo electrónico: revistauniciencia@una.cr