



Análisis de las actividades sobre variabilidad estadística en los libros de texto de educación secundaria: Una mirada desde las propuestas internacionales

*Analysis of statistical variability activities in secondary education textbooks: a
study from an international proposal standpoint*

*Análise das atividades sobre variabilidade estatística nos livros de texto do
ensino médio: Uma visão a partir das propostas internacionais*

Francisco Rodríguez-Alveal¹ • Danilo Díaz-Levicoy² • Claudia Vásquez³

Received: *Dec/28/2019* • Accepted: *Apr/24/2020* • Published: *Jan/31/2021*.

Resumen

El propósito de este trabajo es analizar las actividades sobre variabilidad en los libros de texto de educación secundaria, que proporciona gratuitamente el Ministerio de Educación chileno, de acuerdo con las directrices entregadas por la Asociación Americana de Estadística para la Evaluación e Instrucción en Estadística Educacional y los Estándares Estatales Comunes Americanos de Matemática. Se sigue una metodología cualitativa, utilizando el análisis de contenido. La muestra fue de tipo intencionada y conformada por ocho libros de texto de enseñanza secundaria (de 1.º a 4.º año), los que se encuentran en concordancia con las actuales bases curriculares para matemática en Chile. Los resultados evidencian que, en general, estos libros de texto no emplean datos reales y no mencionan los tipos de variabilidad presentes en la captura de información para su resumen, como la variabilidad natural, inducida y muestral. Asimismo, los contenidos son frecuentemente abordados de manera procedimental, lo cual restringe la enseñanza a la aplicación de fórmulas y, en casos puntuales, a aclarar ciertas notaciones. Además, no se hace un uso pedagógico de las herramientas computacionales como Excel o GeoGebra. El estudio evidenció las falencias que presentan los libros de texto para la enseñanza de la variabilidad, como entregar definiciones claras y su rol en estadística. Por ello, el profesorado debe complementar lo indicado en esas obras con nuevas lecturas y artículos científicos en los que se traten estos temas, como la introducción de metodologías adecuadas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad; la enseñanza mediante proyectos; el estudio de casos en el cual intervengan situaciones problemáticas, donde este concepto juegue un rol fundamental en la toma de decisiones.

Francisco Rodríguez-Alveal, ✉ frodriguez@ubiobio.cl.  <http://orcid.org/0000-0002-9141-4502>

Danilo Díaz-Levicoy, ✉ dddiaz01@hotmail.com.  <http://orcid.org/0000-0001-8371-7899>

Claudia Vásquez, ✉ cavasque@uc.cl.  <http://orcid.org/0000-0002-2593-7815>

1 Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.

2 Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

3 Pontificia Universidad Católica de Chile, Villarrica, Chile.



Palabras clave: Variabilidad; actividades escolares; estadística; libros de texto; educación secundaria; educación matemática

Abstract

The purpose of this paper is to analyze variability activities in secondary education textbooks, which are provided free of charge by the Chilean Ministry of Education, in accordance with the Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education endorsed by the American Statistical Association and the Common Core State Standards in Mathematics. A qualitative methodology is followed, using content analysis as a method. Sampling was intentional and included eight textbooks of secondary education (freshman, sophomore, junior, and senior), which are in accordance with the current math curriculum in Chile. Results show that, in general, these textbooks do not use real data and do not mention the types of variability, whether natural, induced, or sample variability, to summarize information. In addition, contents are frequently approached in a procedural manner, which restricts teaching to using formulas and, in specific cases, to clarifying certain notations. There is no pedagogical use of computational tools like Excel or GeoGebra. The study evidenced textbook flaws to teach variability, including a lack of clear definitions and their role in statistics. Therefore, teachers should complement what has been indicated in the textbook with new readings and scientific articles on these topics, such as the introduction of appropriate methodologies to teaching statistics and probability, teaching through projects, and case studies with problematic situations in which this concept plays a fundamental role in the decision making.

Keywords: variability; school activities; statistics; textbooks; secondary education; mathematics education.

Resumo

Este trabalho tem como propósito analisar as atividades sobre variabilidade nos livros de texto do ensino médio, proporcionados gratuitamente pelo Ministério de Educação no Chile, de acordo com as orientações entregues pela Associação Americana de Estatística para a Avaliação e Instrução em Estatística Educacional e pelas Diretrizes Estaduais Comuns Americanas de Matemática. Segue-se uma metodologia qualitativa, utilizando a análise de conteúdo. A amostragem foi intencional e conformada por oito livros de texto do ensino médio (do 1.º ao 4.º ano), que estão de acordo com as atuais bases curriculares para matemática no Chile. Os resultados evidenciam que, em geral, esses livros de texto não empregam dados reais e não mencionam os tipos de variabilidade presentes na captação de informação para seu resumo, como a variabilidade natural, induzida e de amostragem. Igualmente, os conteúdos são frequentemente abordados de maneira procedimental, restringindo ao ensino à aplicação de fórmulas e, em casos pontuais, a esclarecer certas notações. Além disso, não se faz um uso pedagógico das ferramentas tecnológicas como Excel ou GeoGebra. O estudo evidenciou as falências apresentadas nos livros de texto para o ensino da variabilidade, como entregar definições claras e seu papel em estatística. Por isso, o professorado deve complementar o indicado nesses textos com novas leituras e artigos científicos que tratem desses temas, como a introdução de metodologias adequadas para o ensino da estatística e da probabilidade; o ensino por meio de projetos; o estudo de casos no qual intervenham situações problemáticas, onde este conceito desempenhe um papel fundamental na tomada de decisões.

Palavras-chave: Variabilidade; atividades escolares; estatística; livros de texto; ensino médio; educação matemática.



INTRODUCCIÓN

Producto de su aplicabilidad y uso, el estudio de la estadística y la probabilidad se introduce con fuerza en los currículos escolares desde los primeros cursos de Educación Primaria, lo que motiva evaluar, si los materiales curriculares, como, por ejemplo, los libros de texto, representan adecuadamente las ideas estadísticas fundamentales (Bargagliotti, 2012).

Al respecto, el informe para la Evaluación e Instrucción en la Educación Estadística (cuyas siglas en inglés son GAISE, Franklin *et al.*, 2005) y los Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010) hacen mención a la variabilidad como uno de los conceptos clave en estadística, pues le otorga sentido, y juega un rol fundamental en “la resolución de problemas estadísticos y la toma de decisiones dependen de la comprensión, explicación y cuantificación de la variabilidad. Es este enfoque en la variabilidad de los datos que diferencia la estadística de la matemática” (Franklin *et al.*, 2005, p. 6).

En el contexto chileno, este objeto estadístico ha sido escasamente estudiado, sobre todo en lo que respecta a cómo es abordado en el sistema escolar, aun cuando las directrices curriculares para la Educación Secundaria del Ministerio de Educación (MINEDUC) esperan que el estudiantado diseñe experimentos con el propósito de indagar qué factores intervienen en una variable de interés para cuantificar dicha influencia, como así también controlar factores que intervengan en la respuesta.

Desde esta mirada, resulta de interés evaluar, si los libros de texto distribuidos gratuitamente por el MINEDUC consideran las directrices del informe GAISE (Franklin *et al.*, 2005) y del CCSSI (2010), por su impacto en las orientaciones curriculares de

diferentes países, concretamente sobre la introducción del concepto estadístico variabilidad, atendiendo a su importancia en el razonamiento estadístico.

Esta investigación centra la mirada en los libros de texto, dada la relevancia de este recurso pedagógico y, debido a que tienen una contribución activa en los procesos de enseñanza y aprendizaje como fuente de consulta y estudio del estudiantado del sistema escolar y docentes en servicio (Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Vásquez y Molina-Portillo, 2018). De la misma forma, el MINEDUC (2008) plantea:

Cumple[n] una función central en la tarea educativa de los docentes, tanto en el aula como en otros espacios de aprendizaje (como la biblioteca o el hogar). Para los estudiantes juega fundamentalmente un rol articulador en el proceso de aprendizaje. Los docentes, en tanto, lo utilizan junto a la guía didáctica para planificar, preparar y desarrollar sus clases. Además, en sectores de mayor vulnerabilidad socioeconómica y cultural, el texto representa un instrumento de equidad y enriquecimiento cultural para las familias. (p. 3)

FUNDAMENTOS

En este apartado se describen los fundamentos teóricos relacionados con la variabilidad estadística y las propuestas realizadas a nivel internacional, en relación con su abordaje en los itinerarios formativos y en los libros de texto.

Variabilidad estadística

En estadística la variabilidad juega un papel esencial, que afecta todos los aspectos de la vida y lo que es observado por las



personas. Por ejemplo, no hay dos artículos semejantes, como tampoco dos sujetos idénticos, aun cuando pertenezcan a una misma especie. Además, la variabilidad es esencial para la existencia de la estadística (Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy, 2003). Esta noción, según Ben-Zvi y Garfield (2004), resulta compleja de entender y aprender para el estudiantado, como su enseñanza para el profesorado. Asimismo, Garfield, Ben-Zvi, Chance, Medina, Roseth y Zieffler (2008) develan que estudiantes conocen qué es la desviación estándar y cómo calcularla, pero no saben cómo interpretarla.

Otros estudios, como los de Lee y Meletiou-Mavrotheris (2003), hacen notar que el estudiantado tiene ideas erróneas o razonamientos incorrectos acerca del concepto variabilidad presente en representaciones gráficas como el histograma, producto de realizar una descodificación no adecuada, como, por ejemplo, visualizar la variabilidad de los datos en el eje vertical en lugar del eje horizontal del histograma; además perciben al histograma como un diagrama de dispersión o un diagrama de secuencia de tiempo.

La variabilidad de los datos puede ser producto de factores tales como una variación real o natural, la cual es inherente a la variable, por ejemplo, las características morfológicas de las personas (peso corporal, estatura, peso, color de ojos, etc.), o una variación inducida, fruto del proceso de medición, el muestreo o de errores de medición (Wild y Pfannkuch, 1999).

La variabilidad inducida son las perturbaciones sistemáticas de las mediciones de los factores producto del mal uso de instrumentos de medición. Al igual que las realizadas por quienes investigan en los diseños de sus estudios, para medir cómo influyen las alteraciones de un factor sobre una

variable que se desea medir, por ejemplo, el efecto de la temperatura en una sala de clase con el rendimiento académico estudiantil.

Otro tipo de variabilidad es la muestral, producto que en estadística dos muestras no necesariamente entregarán los mismos estadígrafos de tendencia central, variabilidad y forma, cuya distribución, tiene injerencia en las distribuciones de muestreo de los estadígrafos promedio y la varianza, base de la inferencia estadística. No obstante, como mencionan Begué, Batanero y Gea (2018), la comprensión de la distribución muestral del promedio y varianza involucra conjugar las ideas de valor esperado o esperanza matemática y variabilidad de un cierto estadístico en muestras extraídas de la misma población.

Según Chan y Ismail (2013) y de acuerdo con el marco de pensamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), además de conocer las posibles fuentes de variación que pueden intervenir en un conjunto de datos, hay cuatro características de consideración en la variación: medir y modelar, notar y reconocer, explicar y tratar, y estrategias de investigación.

Variabilidad en el currículo escolar chileno y su influencia internacional

El currículo de Educación Secundaria en Chile se organiza en cuatro ejes: números, álgebra y funciones, geometría y datos y probabilidad. De acuerdo con las bases curriculares (MINEDUC, 2015a), el eje de datos y probabilidad pretende lo siguiente:

[Que el estudiantado] diseñe experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados por sexo cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición



y de dispersión para resolver problemas. El enfoque de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones, y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos. (p. 100)

En este contexto, la Tabla 1 muestra los objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de variabilidad, presentes en el currículo escolar chileno a nivel de Educación Secundaria.

A partir de la Tabla 1 se observa que la variabilidad está presente, de manera implícita, relacionada con el estudio de la media, producto de la extracción de una población de muestras aleatorias de igual tamaño, como también el cálculo de estadígrafos como el rango, rango intercuartil, varianza, desviación estándar, para lo cual se hizo uso de herramientas tecnológicas, particularmente Excel y GeoGebra. También, se considera el cálculo de estadígrafos de

variabilidad asociados a una variable aleatoria discreta en términos de los momentos, como la esperanza matemática.

De igual manera se observa que la introducción del concepto variabilidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje, a nivel del sistema escolar chileno, está orientada, esencialmente, a actividades de tipo procedimental. Este escenario contradice lo mencionado por [Gea, Batanero, Artega, Cañadas y Contreras \(2014\)](#), quienes indican que se deberían potenciar aspectos conceptuales por sobre los procedimentales, es decir, fortalecer la parte conceptual por sobre la aplicación de fórmulas, lo que permitiría promover un aprendizaje activo.

Al mismo tiempo, el informe GAISE ([Franklin et al., 2007](#)) sugiere que los libros de texto deberían considerar en sus actividades los siguientes aspectos que resultan esenciales para la enseñanza de los temas estocásticos:

1. Las actividades deben facilitar la adquisición de los conocimientos estadísticos, que permitan desarrollar un razonamiento estadístico.

Tabla 1. *Objetivos de aprendizaje del muestreo y estadígrafos de variabilidad en la Educación Secundaria chilena*

Curso	Objetivos de aprendizaje
Primero Medio (14-15 años)	Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.
Segundo Medio (15-16 años)	Determinación del rango, varianza y desviación estándar, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando, en forma manual y mediante el uso de herramientas tecnológicas. Análisis de las características de dos o más muestras de datos, haciendo uso de indicadores de tendencia central, posición y dispersión.
Tercero Medio (16-17 años)	Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta. Determinación de la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones.
Cuarto Medio (17-18 años)	No se mencionan estadígrafos asociados a la cuantificación a la variabilidad.

Nota: Extraído de MINEDUC (2015a; 2015b).



2. Utilizar información proveniente de datos reales cuyos contextos permitirían reflexionar y dar sentido a los resúmenes estadísticos.
3. Proponer actividades que permitan desarrollar una comprensión conceptual de los conceptos estadísticos, más que un simple conocimiento procedimental.
4. Las actividades deben facilitar un aprendizaje activo, es decir, promover el análisis, la síntesis y la evaluación.
5. Hacer uso de tecnología, pues por su ámbito dinámico, favorece la comprensión de los conceptos estadísticos, en particular el de variabilidad.

METODOLOGÍA

En coherencia con el objetivo propuesto, se ha optado por realizar una investigación de corte cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), centrada en el análisis de contenido (Krippendorff, 1997) de las actividades presentes en los libros de texto de Educación Secundaria relacionadas con el objeto estadístico de variabilidad. Los libros de texto analizados son los entregados

gratuitamente por el MINEDUC a los establecimientos educacionales particulares subvencionados y municipales (Ver Tabla 2), los que se etiquetaron como T1 hasta T8 para facilitar su citación a lo largo del escrito.

La muestra fue intencionada y se encuentra conformada por 8 libros de texto de Enseñanza Secundaria (1° a 4° año). Estos libros de texto muestran sintonía con las actuales bases curriculares para la asignatura de matemática (MINEDUC, 2015a; 2015b), para orientar, por su amplia difusión, al profesorado del sistema escolar acerca de los contenidos a trabajar en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las temáticas relacionadas con estadística y la probabilidad.

Cabe mencionar que los libros de texto de primer y segundo año de secundaria, T5 y T6 son versiones actualizadas, de los libros T1 y T2, respectivamente. Tal actualización no ha ocurrido con los libros de tercero y cuarto año de secundaria entre los años 2016 y 2018.

Para llevar a cabo el análisis, se han identificado, en cada libro, las secciones o trozos de texto, ejercicios y situaciones problemáticas que hacen referencia al concepto de

Tabla 2. *Libros de texto analizados*

Código	Autoría	Título	Editorial
T1	Muñoz, del Valle y Santis (2016)	Matemática 1 Medio texto del estudiante	SM
T2	Muñoz, Rupin y Jiménez (2016)	Matemática 2 Medio texto del estudiante	SM
T3	Saiz y Blumenthal (2016)	Matemática 3 Medio texto del estudiante	Cal y Canto
T4	Muñoz, Gutiérrez y Muñoz (2016)	Texto Matemática IV medio	Santillana
T5	Galoso, Maldonado y Marambio (2018)	Matemática 1 Medio texto del estudiante	Santillana
T6	Chacón, García, Rupin, Setz y Villena (2018)	Matemática 2 Medio texto del estudiante	SM
T7	Saiz y Blumenthal (2018)	Matemática 3 Medio texto del estudiante	Cal y Canto
T8	Muñoz, Gutiérrez y Muñoz (2018)	Texto Matemática IV medio	Santillana

Nota: Fuente propia de la investigación.



variabilidad. Además, se analizó, si los datos eran producto de situaciones reales o ficticias, el alcance de las preguntas, si abordaban cuestiones conceptuales o algorítmicas. De igual manera, se analizaron las habilidades que se deseaban desarrollar en cada una de las actividades y las definiciones acerca de variabilidad y los estadígrafos atinentes a este tópico entregadas en los libros de texto.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en los siguientes cuatro apartados: procedimientos propuestos, situaciones problemas, habilidades propuestas y conceptos asociados a variabilidad. Dichos análisis permiten evaluar, en una primera instancia, si los libros de texto están alineados a las directrices formuladas por el informe GAISE (Franklin *et al.*, 2007) y los estándares del CCSSI (2010), en concordancia con las directrices curriculares y al uso de datos reales, a los conceptos estadísticos entregados en relación con la variabilidad, al uso de programas estadísticos y de las actividades tendientes a generar un razonamiento estadístico en estudiantes.

Procedimientos propuestos

Dentro de las actividades propuestas en los libros de texto analizados, en general, no se hace mención de la naturaleza de los datos, atendiendo que esto permitiría al estudiantado explicar la variabilidad de los datos, así como poder clasificar el tipo de

variabilidad presente, según sea inducida o muestral para tomar decisiones sobre el estadígrafo más pertinente para cuantificarla. Al respecto, Cooper y Shore (2010) mencionan:

Más que introducir métodos que cuantifican la variabilidad, los estudiantes necesitan vivenciar experiencias en las que simplemente comparan la variabilidad de conjuntos de datos con el propósito de desarrollar la comprensión y los insights que variabilidad significa para diferentes tipos de datos. Comparaciones visuales de la magnitud de la variabilidad estimula la discusión sobre lo que hace un conjunto de datos más o menos variables. (p. 2).

No obstante, los libros de texto distribuidos por el MINEDUC entre los años 2016 y 2018 no hacen referencia a que, en las actividades propuestas, intervenga información proveniente de datos reales para trabajar el objeto de variabilidad. Esto nos lleva a conjeturar que provienen esencialmente de situaciones simuladas o ficticias.

Además, se puede advertir que el número de actividades de los libros de primer y segundo año de secundaria entregados el año 2016 difiere a las presentadas en el libro de texto del año académico 2018, respectivamente.

Situaciones problemas

En la Figura 1 se presenta una actividad extraída del libro (T1), en el cual se

Tabla 3. Número de actividades presentes en los textos con datos reales o simulados

Número de actividades	Libros de texto 2016					Libros de texto 2018				
	T1	T2	T3	T4	Total	T5	T6	T7	T8	Total
Datos reales	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Datos simulados	3	48	56	9	116	-	-	56	9	64

Nota: Fuente propia de la investigación.

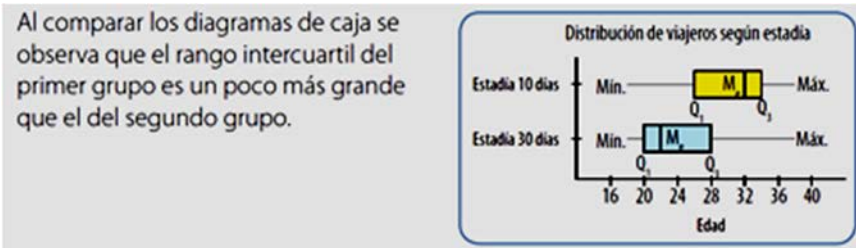


Figura 1. *Descodificar información resumida en gráficos de cajas*
 Nota: Extraída de T1 (p. 279).

entrega la distribución de la edad simulada (variabilidad natural) de viajeros según días de estadía (10 días y 30 días), mediante un gráfico de cajas, representación introducida recientemente en el currículo escolar chileno, que permite visualizar características de los datos tales como tendencia central, variabilidad y forma.

Específicamente, se indican: la observación mínima y máxima, primer y tercer cuartil (Q_1 , Q_3) y la mediana que corresponde al segundo cuartil (Q_2). Estos permiten calcular los estadígrafos de variabilidad como el *rango* y el *rango intercuartílico*, para contrastar el comportamiento de las estadías de los viajeros, gráfica y numéricamente, para ratificar la interrogante planteada.

De manera similar, en la Figura 2 se resumen gráficamente la distribución de los errores de ortografía efectuados por dos departamentos de una editorial mediante dos gráficos de cajas, variabilidad que puede ser clasificada como variabilidad inducida.

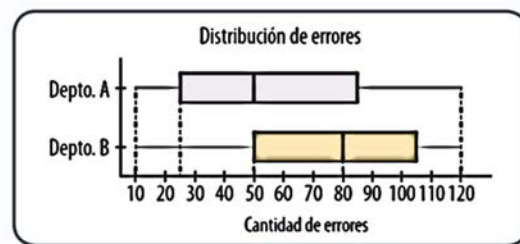
La respuesta al interrogante planteado pasa inicialmente por comparar visualmente la estructura de los gráficos de cajas, la que permite estudiar la forma (asimetría), el largo de los bigotes para extraer información acerca de distribución de los datos y tomar decisiones al respecto. Asimismo, es posible estimar numéricamente las medidas de variabilidad como el *rango* y el *rango intercuartílico*, teniendo presente que en el gráfico de cajas es viable estimar numéricamente

los cuartiles, base para calcular el rango intercuartílico y, con base en su valor, dar respuesta a la interrogante.

Cabe hacer notar que, de los enunciados presentados en las figuras anteriores, solamente en Figura 2 se contextualiza la situación desplegada, lo que permitiría dar sentido al valor numérico; esto es fundamental, pues el contexto proporciona significados (Cobb y Moore, 1997). Por su parte, en los libros de texto de primer y segundo año de secundaria entregados por el MINE-DUC durante el año 2018, no se mencionan actividades de este tipo, que den cuenta de estadígrafos de variabilidad.

Por el contrario, solo se entregan actividades esencialmente procedimentales, como “Determinar el rango, varianza y desviación

- c) Ramón es el encargado de realizar un estudio sobre los errores en la ortografía cometidos en dos departamentos de una editorial. Para esto construye el siguiente gráfico en el que se exhibe la distribución de los errores para una muestra de 100 trabajos para el departamento A y B.



- Si los departamentos A y B trabajan con la misma cantidad de personal y en las mismas condiciones, ¿cuál es el departamento más eficiente?

Figura 2. *Descodificación de información resumida en una representación gráfica*
 Nota: Extraída de T1 (p. 271).



estándar en datos no agrupados y agrupados en tablas de distribución de frecuencia”.

En esta misma línea, el libro de tercer año de secundaria, que durante los años 2016, 2017 y 2018 respectivamente no ha sido modificado por el MINEDUC, presenta actividades asociadas al consumo de cigarrillos de habitantes de dos ciudades, resumido en una tabla de distribución de frecuencia. Esta variabilidad puede ser calificada como *natural*, dado que en el enunciado no menciona la manipulación del factor consumo de cigarrillo, según tipo de ciudad (Figura 3).

En esta actividad se debe calcular la media aritmética, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación con la información resumida en la tabla de distribución de frecuencia, y concluir acerca del consumo promedio y la variabilidad del consumo de cigarrillos en ambas ciudades, para tomar una decisión al respecto.

De manera similar, en el libro (T7, p. 330) se entrega una actividad en la cual el alumnado debe calcular las medidas de variabilidad para un conjunto de datos no agrupados (Figura 4).

Además, dentro de los procedimientos explicitados en el currículo chileno (CCSSI, 2010 y GAISE), se encuentra la “Aplicación

e interpretar gráficamente los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta”. Al respecto, en los libros de texto de tercer año de secundaria (T7, p. 345) se presentan actividades tendentes a calcular la esperanza matemática de variables aleatorias discretas así como también la varianza y la diferencia entre esperanzas matemáticas, asociadas al primer y segundo momento de una variable aleatoria, como se observa en la Figura 5.

Estas actividades no consideran la interpretación de la varianza o desviación estándar asociada a una variable aleatoria. En cambio, promueven el uso de las fórmulas asociadas a estos indicadores numéricos. Por otro lado, a nivel de tercer año de secundaria (T7) se introduce la distribución binomial, no obstante, en el libro de cuarto año de secundaria (T8) se entrega la expresión de la media y desviación estándar de una variable aleatoria con distribución binomial, modelo probabilístico recientemente incorporado en el currículo escolar chileno.

Además, dentro de las propuestas del MINEDUC, CCSSI (2010) y GAISE es el uso de herramientas tecnológicas como calculadoras, hojas de cálculo y software, las

que según Pea (1987) son un medio que ayudan a trascender las limitaciones de la mente humana. En relación con el uso de tecnología, en la Tabla 4 se muestran el número de actividades presentes en los libros de texto.

En la Tabla 4 se observa la escasa presencia que tienen los

6 Se ha realizado una encuesta sobre la cantidad de cigarrillos fumados por una persona mayor de 20 años diariamente en dos ciudades distintas del país. Los resultados se presentan en las siguientes tablas:

Ciudad A		Ciudad B	
Nº de cigarrillos	Nº de personas	Nº de cigarrillos	Nº de personas
[0 - 5[32	[0 - 5[37
[5 - 10[36	[5 - 10[41
[10 - 15[28	[10 - 15[23
[15 - 20[12	[15 - 20[8
[20 - 25[2	[20 - 25[1

Determina:

- La media aritmética de cada una de las muestras.
- La varianza de la muestra de la ciudad A.
- La varianza de la muestra de la ciudad B.
- La desviación estándar de la muestra de la ciudad A.
- La desviación estándar de la muestra de la ciudad B.
- El coeficiente de variación de cada una de las muestras.
- ¿Qué puedes concluir si comparas ambas muestras y sus estadígrafos?

Figura 3. Cálculo de medidas de variabilidad de información resumida en una tabla de distribución de frecuencias

Nota: Extraída de T3(p. 327) y T7 (p. 327).



En el colegio de Antonia la premiación anual será la segunda semana de diciembre, los profesores junto a la UTP del colegio, deben escoger al alumno de excelencia académica, los postulantes son, Marco, Antonia y María José cuyas notas se muestran en la siguiente tabla:

Antonia	5,8	6,5	6,7	6,5	6,4	6,3	6,2	6,8	6,1
Marco	6,4	6,3	6,0	6,6	6,7	6,8	6,4	6,1	6,3
María José	6,1	5,9	6,5	6,7	6,6	6,3	6,5	6,7	6,2

Determina:

- El promedio de cada alumno.
- La desviación estándar para las notas de cada alumno.
- El coeficiente de variación (CV) de las notas para cada alumno.
- En tu opinión, ¿quién tiene mejor rendimiento?

Figura 4. *Cálculo de medidas de variabilidad de información resumida en una tabla de datos*

Nota: Extraída de T7 (p. 330).

Consideremos el lanzamiento de tres monedas y el suceso "el número de caras obtenidas". En este caso, ¿cuál es la esperanza matemática?

En este caso, el dominio de la función probabilidad es 0, 1, 2 y 3, dependiendo del número de caras obtenidas. Definamos su función de probabilidad:

Número de caras	Probabilidad
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Ahora bien, calculemos la Esperanza:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$$

Es decir, se debería esperar que, en un gran número de lanzamientos, el resultado promedio estará entre una o dos caras.

En el caso anterior del dado cargado, tenemos que:

Número del dado	Probabilidad
1	0,20
2	0,10
3	0,05
4	0,30
5	0,25
6	0,10

Y su esperanza era: $E(X) = 3,60$

Calculemos entonces, la varianza de la variable:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i)$$

$$V(X) = (1 - 3,6)^2 \cdot 0,2 + (2 - 3,6)^2 \cdot 0,1 + (3 - 3,6)^2 \cdot 0,05 + (4 - 3,6)^2 \cdot 0,3 + (5 - 3,6)^2 \cdot 0,25 + (6 - 3,6)^2 \cdot 0,1$$

$$V(X) = 1,352 + 0,256 + 0,018 + 0,048 + 0,49 + 0,576$$

$$V(X) = 2,74$$

Nota que este resultado nos muestra un valor en unidades cuadradas de probabilidad, por lo tanto, si extraemos la raíz cuadrada de la varianza, llamada desviación estándar, se tendrá que: $\sqrt{V(X)} = \sqrt{2,74} \approx 1,66$.

Figura 5. *Cálculo de la esperanz y varianza asociada a una variable aleatoria discreta*

Nota: Extraída de T8 (pp. 345-346).

Tabla 4. *Número de actividades donde se hace uso de recursos tecnológicos en los libros de texto en estudio*

Recursos Tecnológicos	Libros de texto 2016					Libros de texto 2018		
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Excel	-	-	-	1	-	-	-	1
GeoGebra	-	-	-	2	-	-	-	2
Calculadora	-	-	-	1	-	-	-	1

Nota: Fuente propia de la investigación.



recursos tecnológicos en los textos escolares analizados, lo que resulta contradictorio debido que el MINEDUC que ha impulsado el uso de las TIC desde la década de los 90, con la puesta en marcha del proyecto Enlaces, y ha impulsado los estándares TIC en la formación de profesorado.

Al mismo tiempo, se visualiza que el software más utilizado es el GeoGebra, el cual tiene la característica de ser interactivo y de fuente abierta, pedagógicamente puede ser considerado como una herramienta que podría potenciar el mejoramiento de la calidad de la educación y ser relevante para mejorar los aprendizajes y, por ende, los indicadores de calidad de la educación (Sandoval, Rodríguez-Alveal y Maldonado-Fuentes, 2011). Al respecto, como menciona Inzunza (2014), el software GeoGebra permite que los sujetos usuarios sean partícipes en la construcción de su propio conocimiento.

Al respecto, este libro de texto alude a la hoja de cálculo de Microsoft Excel con una actividad en la cual se debe simular una variable aleatoria con distribución normal con media 30 y varianza 36 haciendo uso de la función *distr.norm.inv* como se observa en la Figura 6. Concretamente, en el punto g) se debe calcular la desviación estándar de los datos simulados y compararlos con la desviación estándar real, actividad relacionada con la variabilidad muestral.

Además, se presenta una actividad donde, haciendo uso del software GeoGebra, se debe simular y analizar la aproximación de una variable aleatoria con distribución binomial

mediante la distribución normal (Figura 7). En dicha actividad se encuentra, de manera explícita, la variabilidad muestral, dado que se deben simular 1 000 muestras y argumentar acerca del valor de la media de la distribución y la desviación estándar.

En esta actividad se debe utilizar la tecnología de modo procedimental y no pedagógico, como lo han hecho saber Sandoval, Rodríguez-Alveal y Maldonado-Fuentes (2017), aun cuando debería ser utilizada como una herramienta cognitiva, que busque el desarrollo de habilidades conceptuales.

Habilidades propuestas en las situaciones problemas

Las actividades propuestas en los libros de texto analizados, en general, apuntan a desarrollar habilidades de tipo algorítmica como calcular, y en menor grado habilidades superiores como concluir y argumentar, situación que se resume en la Tabla 5.

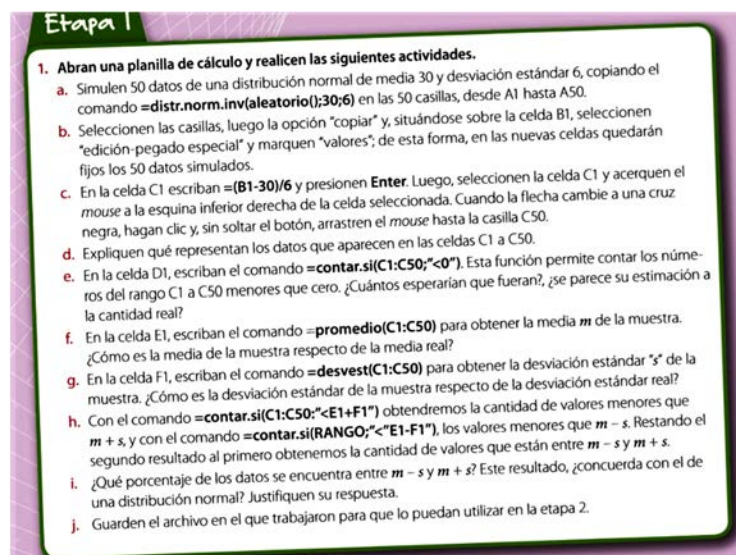


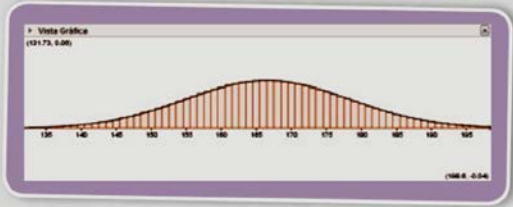
Figura 6. Simulación en Excel de una variable aleatoria con distribución normal

Nota: Extraída de T8 (p. 298).



4. Ahora, consideren la última distribución binomial que simularon, con 1 000 repeticiones, para aproximarla a una distribución normal.

- Argumenten por qué, en este caso, la media de la distribución es igual a $\frac{1000}{6}$ y la desviación estándar es $\frac{25\sqrt{2}}{3}$.
- Utilizando los valores de media y desviación estándar anteriores usen el *software* para simular la distribución normal. Para esto escriban en la barra de entrada **Normal[1000/6, 25*sqrt(2)/3, x]**. Ajusten la proporción de los ejes de modo que puedan visualizar bien las gráficas. De esta manera obtendrán una distribución como la que se muestra a continuación.



- ¿Cómo es la distribución normal respecto de la distribución binomial?
- En este caso, ¿podrían afirmar que la distribución binomial puede aproximarse a la normal? ¿por qué?

Figura 7. *Aproximación de una variable aleatoria con distribución binomial a una distribución normal*

Nota: Extraída de T8 (p. 305).

Conceptos asociados a variabilidad presentes en los libros de texto analizados

El MINEDUC en sus bases curriculares no hace mención explícitamente al concepto de variabilidad, como lo realizan el CCSSI (2010) y el informe GAISE. En cambio, en los libros de texto analizado se entregan y definen los conceptos entregados en la Tabla 6.

Tabla 5. *Distribución de las habilidades declaradas en las actividades sobre variabilidad presentes en los libros de texto*

Habilidades	Libros de texto 2016					Libros de texto 2018				
	T1	T2	T3	T4	Total (n=112)	T5	T6	T7	T8	Total (n=64)
Calcular	1	14	49	2	66	-	-	49	5	54
Analizar	1	9	-	-	10	-	-	-	-	-
Demostrar	-	8	-	-	8	-	-	-	-	-
Justificar	-	11	-	-	11	-	-	-	-	-
Simular	-	5	-	3	8	-	-	-	3	3
Concluir	1	-	5	-	6	-	-	5	-	5
Argumentar y comunicar	-	1	2	-	3	-	-	2	-	2

Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 6. *Conceptos estadísticos asociados al objeto variabilidad según nivel y año de los libros de texto estudiados*

Conceptos estadísticos	Libros de texto 2016				Libros de texto 2018			
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Dispersión		X						
Variabilidad		X						
Heterogéneo		X						
Variable aleatoria				X				X
Estadígrafos de variabilidad			X				X	

Nota: Fuente propia de la investigación.



Al respecto, el libro de texto de segundo año (T2), entrega la siguiente definición de dispersión, en la que interviene el concepto de variabilidad:

Se llama dispersión de un conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ a la variabilidad que existe entre los datos y las medidas de tendencia central. Generalmente estas medidas tienen que ver con el grado de dispersión que tiene el conjunto de datos con respecto a su media. Mientras más dispersos sean, más heterogéneo es el conjunto, y si es menos disperso es más homogéneo. La dispersión se puede cuantificar utilizando el rango (R), la desviación media (Dm), la desviación estándar ($\sigma(x)$) y la varianza ($\text{var}(x)$ o $\sigma^2(x)$) (T2, p. 263)

Otros conceptos estadísticos de dispersión mencionados, son la varianza, desviación estándar y coeficiente de variación, introducidos en los libros de texto de tercer de secundaria (T3, p. 324):

Estos estadísticos nos indican el grado de variabilidad de los datos en una muestra. Determinan el grado de dispersión de la muestra con respecto al promedio o media de esta.

- Varianza: corresponde al promedio de los cuadrados de las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los valores observados (en datos no agrupados) o de cada marca de clase (en datos agrupados).
- Desviación estándar: es la raíz cuadrada de la varianza, con esto se obtiene un estadístico de dispersión expresado en la misma unidad de medida de la variable.

- Coeficiente de variación: este estadístico indica la variabilidad de la muestra, expresada en porcentaje. Compara la desviación estándar con respecto al promedio de la muestra.

CONCLUSIÓN

De acuerdo con los resultados obtenidos, las situaciones problemáticas tratadas en los libros de texto están asociadas, preferentemente, a resumir numéricamente la variabilidad mediante los estadísticos como el rango, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Los datos utilizados provienen de situaciones simuladas y descontextualizados de fenómenos reales, lo que obstaculizaría la enseñanza de la estadística y, por consiguiente, no permitiría alfabetizar estadísticamente al alumnado del sistema escolar (Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga, 2011). Esto tampoco está acorde con lo demandado en el informe GAISE y el CCSSI (2010).

Asimismo, las situaciones problemáticas no abordan estudios observacionales y experimentales donde los grupos de estudiantes puedan distinguir el efecto de la variabilidad inducida, natural o muestral; esta última es la base para entender las distribuciones de muestreo como la del promedio y de la varianza, preámbulo de la inferencia estadística.

Por otro lado, los contenidos asociados a variabilidad presentes en los libros de texto de los años 2016 y 2018 no son isomorfos. Llama la atención de que los libros del año académico 2016 abordan mayormente este contenido, en cambio los del año 2018 lo obvian a nivel de primer y segundo año de secundaria, lo cual evidencia una falta de políticas ministeriales en relación con la entrega de este contenido estadístico, en los libros de texto entregados gratuitamente en Chile.



Asimismo, los libros de texto analizados no potencian el uso de tecnología como planillas electrónicas, particularmente Excel, ni del software GeoGebra, cuya fase interactiva permite simular y estudiar el comportamiento de estadígrafos como los de variabilidad o applets y dar respuesta a las actividades prácticas; el tema es que estos recursos podrían permitir fijar ideas y comprender conceptos abstractos como el de variabilidad.

Finalmente, el presente estudio proporciona evidencias sobre cómo se está abordando uno de los objetos estadísticos fundamentales en estadística: la variabilidad. Estos resultados podrían favorecer la reflexión en torno a núcleos temáticos, para profundizar y reorientar las prácticas de docentes en el desarrollo profesional del futuro profesorado, así como también analizar las evaluaciones acordes a las propuestas GAISE y del CCSSI. Esto permitiría mejorar los niveles de desarrollo de las habilidades demandadas por el MINEDUC en relación con los contenidos de estadística y probabilidad, dado que esta temática juega un rol fundamental en la formación de una ciudadanía estadísticamente alfabetizada.

RECONOCIMIENTOS

Este artículo se deriva de la investigación financiada por la Dirección de Investigación de la Universidad del Bío-Bío (DIUBB) código. 166523 3/R. “Habilidades de análisis e interpretación de datos en presencia de variabilidad estadística: Un estudio comparativo en estudiantes de formación inicial docente y profesores del sistema escolar”.

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: F.R.A. 50 %, D.D.L. 30 % y C.V. 20 %.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE LOS DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente **F.R.A.**, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Bargagliotti, A. E. (2012). How well do the NSF funded elementary mathematics curricula align with the GAISE report recommendations? *Journal of Statistics Education*, 20(3), 1-26. doi: <https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889646>
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Arteaga P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada.
- Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 63-79. doi: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256>
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Research on Reasoning about Variability: A Forward. *Statistical Education Research Journal*, 3(2), 4-6. www.stat.auckland.ac.nz/serj
- CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Chan, S.W. e Ismail, Z. (2013). Assessing misconceptions in reasoning about variability among high school students. *Procedia. Social and Behavioral Sciences*, 93, 1478-1483. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.067>



- Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823. doi: <https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723>
- Cooper, L. y Shore, F. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, 18(2), 1-16. doi: <https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889487>
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de Educación Primaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 21(3), 299-326.
- Díaz-Levicoy, D., Vásquez, C. y Molina-Portillo, E. (2018). Estudio exploratorio sobre tablas estadísticas en libros de texto de tercer año de Educación Primaria. *TANGRAM. Revista de Educação Matemática*, 1(2), 18-39. doi: <https://doi.org/10.30612/tangram.v1i2.7574>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: a Pre-k-12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Garfield J. B., Ben-Zvi D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., Zieffler, A. (2008). Learning to reason about variability. En J. B. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing Students' Statistical Reasoning* (pp. 201-214). Dordrecht: Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9_10
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 76, 37-45
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Inzunza, S. (2014). Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. En J. Asenjo, O. Macías y J. C. Toscano (Eds.), *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 1-11). Buenos Aires: OEI.
- Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Lee, C. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. En American Statistical Association (Eds.), *Proceedings of 2003 Joint Statistical Meeting: Section on Statistical Education* (pp. 2326-2336). American Statistical Association.
- MINEDUC. (2008). *Política de textos escolares*. Ministerio de Educación.
- MINEDUC. (2012). *Estándares orientadores para egresados de Pedagogía en Educación Media*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC. (2015a). *Bases Curriculares. 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC. (2015b). *Matemática. Programa de estudio. Tercero medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Pea, R. (1987). Cognitive technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 89-122). Lawrence Erlbaum Associates.
- Sandoval, P., Rodríguez-Alveal, F. y Maldonado-Fuentes, A. C. (2011). Competencias TIC en la formación inicial docente: Estudio descriptivo para la toma de decisiones en el currículo. *Reflexão e Ação*, 19(1), 271-295.
- Sandoval, P., Rodríguez-Alveal, F. y Maldonado-Fuentes, A. C. (2017). Evaluación de la alfabetización digital y pedagógica en TIC, a partir de las opiniones de estudiantes en formación inicial docente. *Educação e Pesquisa*, 43(1), 127-143. doi: <https://dx.doi.org/10.1590/s1517-9702201701154907>
- Watson, J., Kelly, B., Callingham, R. & Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29. doi: <https://doi.org/10.1080/0020739021000018791>
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>



Análisis de las actividades sobre variabilidad estadística en los libros de texto de educación secundaria: Una mirada desde las propuestas internacionales (Francisco Rodríguez-Alveal, Danilo Díaz-Levicoy y Claudia Vásquez). *Uniciencia* is protected by [Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported \(CC BY-NC-ND 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/)