UNICIENCIA 26
pp. 153-168
2012

LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: UN EJEMPLO EN EL SISTEMA EDUCATIVO COSTARRICENSE

DIDACTIC TRANSPOSITION: AN EXAMPLE IN THE EDUCATIVE SYSTEM IN COSTA RICA

Cristian Alfaro Carvajal
Jesennia Chavarría Vásquez

RESUMEN

En este artículo se consideran algunas de las ideas fundamentales deYve Chevallard (1980) en la teoría sobre la transposición didáctica, a partir de las cuales se hará un análisis de la transformación que sufre un conocimiento desde el nivel matemático hasta el nivel escolástico. Para evidenciar esta transformación, se analizará el tema del conjunto de los números enteros, el cual está planteado en el programa de estudios de sétimo año en el sistema educativo costarricense.

Palabras claves: Educación, Educación Matemática, Transposición Didáctica, Matemática, Didáctica Matemática

ABSTRACT

This paper includes some fundamental ideas about the theory of didactic transposition of Yve Chevallard (1980), from which it is made an analysis of the knowledge transformation suffers from the mathematical level to the scholastic level. To demonstrate this transformation, it is analyzed the theme of integers, which is included in the seventh-grade curriculum of the educational system of Costa Rica.

Keywords: Education, Mathematics Education, Didactic Transposition, Mathematic, Mathematic Didactic

1. INTRODUCCION

La transposición didáctica es un tema que introduce Chevallard en el año 1978 y posteriormente lo retoma con el libro denominado "La transposition didactique", en 1980, dicho trabajo ha generado un marco de discusión y de investigación a nivel internacional, a partir del cual surgió un marco teórico que aún en la actualidad sigue vigente.

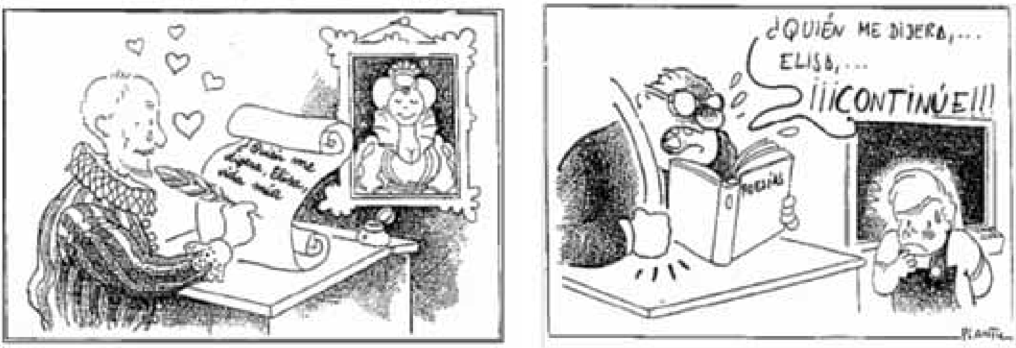
En la sociedad se pueden encontrar diversos ejemplos de la transformación que sufre una información desde su origen hasta la comunicación de la misma a la sociedad; en algunos casos los datos originales difieren notoriamente de aquellos que son presentados al público en general, a través de los medios de comunicación escrita, radial o televisiva.

Si guardamos las diferencias del caso, podemos observar un efecto similar en el proceso que sufre un saber desde sus orígenes, al

1. calfar@una.ac.cr, Escuela de Matemática, Universidad Nacional (UNA). Costa Rica
2. jcha@una.ac.cr, Escuela de Matemática, Universidad Nacional (UNA). Costa Rica

Recibido el 8 marzo de 2011 – Aceptado el 27 agosto de 2011 – Corregido 11 de noviembre de 2011

Figura 1: Ejemplificación de una inadecuada transposición didáctica



Fuente: Plantureux, J.(1988) Wolfgang, tu feras informatique!, Ed. La Découverte/Le Monde

momento en el cual es parte de un sistema didáctico, entendiendo por sistema didáctico la tripleta docente, estudiante y saber.

En la Figura 1 se evocan dos momentos: el primero refiere a los orígenes de un saber, en un contexto determinado, con un objetivo claramente definido, mientras que en un segundo momento, se observa que el saber es transmitido con un sentido completamente diferente al que inicialmente le dio origen. Chevallard describe esta situación a través de su teoría sobre la transposición didáctica, definida como la transformación o cambios que sufre el saber científico para poder ser enseñado (Chevallard,1991).

¿Saber erudito o saber enseñado?

El sistema didáctico está constituido por el docente, el estudiante y el saber, previo al trabajo realizado por Chevallard (1980), los análisis teóricos sobre el sistema didáctico se enfocaban en las interacciones únicamente entre el docente y el estudiante. Es a partir de dichas investigaciones realizadas por Chevallard y posteriormente por investigadores de la Escuela Francesa, que el saber se constituye en un objeto de análisis como un nuevo integrante del sistema.

Chevallard (1980), en procura de indicar cuáles son los saberes matemáticos que están presentes en esta terna didáctica, los ha categorizado en nociones matemáticas, que por lo general, son construidas o definidas y son objeto de estudio por parte de los matemáticos, por ejemplo, la noción de número o de grupo. Distingue de estas nociones, las nociones paramatemáticas, que generalmente son preconstruidas, limitadas a un contexto, estas funcionan como nociones- herramienta, que no constituyen un objeto declarado de enseñanza, pero son necesarias en el aprendizaje de las nociones matemáticas, por ejemplo los diagramas de Venn para la enseñanza y aprendizaje de la teoría de conjuntos.

En otra categoría están las nociones protomatemáticas, que son capacidades o habilidades, que se espera que el alumno adquiera sin que estas sean explicitadas. Esta categorización de un saber no es definitiva, es decir, no presenta un comportamiento estático, es posible que una noción matemática pueda pasar a otra categoría y viceversa.

Como consecuencia de las diferencias presentes entre las distintas nociones, surge la siguiente pregunta: ¿Cuáles de los saberes son enseñables y cuáles no pueden serlo?

La transformación de los saberes científicos en su proceso de adaptación para ser enseñados supone la delimitación de saberes parciales, la descontextualización y finalmente una despersonalización, programabilidad y publicidad del saber, conceptos que más adelante serán aclarados. En la transposición didáctica estas condiciones se hallan satisfechas en un proceso de preparación didáctica denominada por el mismo Chevallard (1980) como puesta en texto del saber.

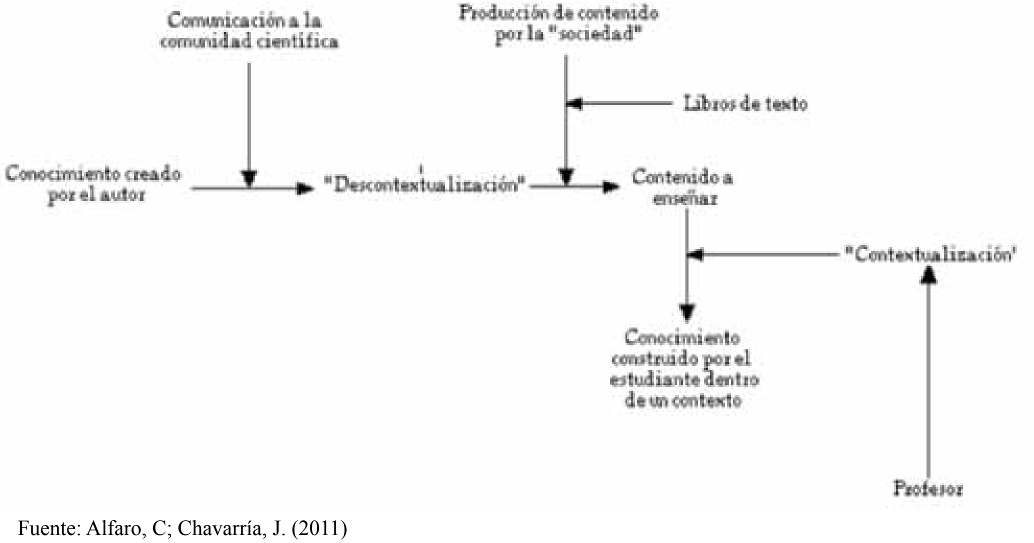
En lo que respecta a la delimitación de saberes parciales, este autor se refiere a un proceso de desincretización, en el cual diferencia las nociones matemáticas y paramatemáticas, de las nociones protomatemáticas. Es decir, define lo que pertenece propiamente al campo de estudio de lo que se presenta implícitamente, establece una clara diferencia entre su objeto de estudio (nociones matemáticas) de aquello que a pesar de ser necesario para la construcción del texto no constituye un objetivo en sí mismo (nociones paramatemáticas).

Esta delimitación del saber provoca una descontextualización del mismo, que trae como consecuencias colaterales el desconocimiento respecto de los problemas y las situaciones que dieron origen al saber. En otras palabras, se crea una ruptura entre el saber y su creación o realización. Asimismo, existe una despersonalización del saber que constituye un requisito para la publicidad, procesos que se inician dentro de la misma comunidad académica y completan su ciclo en el momento de la enseñanza.

El contenido a enseñar llega por lo tanto al ambiente de aula carente del contexto y la situación en el que fue creado. Por ejemplo, conjeturas, experimentación y errores, entre otros. En este caso, debe introducir un contexto dentro del cual el estudiante pueda recrear este conocimiento. En otras palabras, el docente transpone de alguna forma el objeto a enseñar en objeto de enseñanza.

A partir de las ideas de Chevallard (1980) se plantear la transposición didáctica a través de dos procesos: la contextualización y la descontextualización. Un saber erudito que debe ser descontextualizado para su publicación y su transformación en un contenido a enseñar, y un saber a enseñar, que debe a su vez sufrir un proceso de contextualización para instituirse en un saber enseñado, como lo muestra laFigura 2.

Figura 2: Intervención de actores en la transposición de un saber



Fuente: Alfaro, C; Chavarría, J. (2011)

Finalmente, en lo que respecta a la programabilidad de la adquisición del saber, el texto del saber es una norma de progresión en el conocimiento, según lo define Chevallard (1980). En este sentido, el texto, por tanto determina una duración del proceso de enseñanza. No obstante es importante aclarar, como lo hace el autor, el hecho de que en la realidad es muy poco frecuente que un saber sea iniciable y secuenciable, por lo tanto el isomorfismo que se pretende establecer entre el tiempo establecido por el texto y el proceso de aprendizaje es improbable.

A partir de las ideas expuestas anteriormente, se establece la posibilidad de efectuar un análisis de los conceptos matemáticos presentes en los procesos de enseñanza, para determinar su pertinencia como objetos de enseñanza. Esto es fundamental debido a que, según Chevallard (1980), no todo concepto matemático es susceptible a ser un objeto de enseñanza, así como no todo concepto enseñado ha sufrido un proceso de transformación adecuado.

Estas inquietudes justifican el objetivo principal de este trabajo, el cual consiste en analizar la transposición didáctica presente en la enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros, en el nivel de sétimo año del sistema educativo costarricense. Para ello, se llevó a cabo un análisis del conocimiento científico sobre el conjunto de los números enteros, lo que corresponde al saber científico, posteriormente se hizo una revisión de los objetivos y contenidos estipulados por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en el programa de estudio de matemática para el nivel de sétimo año, sobre este tema, esto es el saber a enseñar y finalmente se revisó un libro de texto comúnmente utilizado por los docentes de secundaria en el nivel de sétimo año para el desarrollo del tema de números enteros, lo que representa el saber enseñado.

2. MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentan algunos elementos que sustentan teóricamente este trabajo, fundamentados principalmente en las ideas planteadas desde el año 1980 por YveChevallard. En este sentido, se aborda el concepto de transposición didáctica y los elementos presentes en ésta, la contradicción antiguo/nuevo como motor del proceso de enseñanza y el tiempo de enseñanza en relación con el tiempo de aprendizaje. Asimismo, se abordarán conceptos relacionados con la transposición didáctica como son el saber sabio, erudito o científico, el saber a enseñar y el saber enseñado.

2.1 La transposición didáctica

La teoría de la transposición didáctica coloca en evidencia la legitimación de los contenidos de la enseñanza y como punto fundamental, la diferencia entre el saber enseñado y el saber erudito que lo legitima, diferencia llevada a cabo a través de dos transposiciones: una externa y una interna.

La transposición externa es aquella que se efectúa del saber sabio al saber a enseñar, define el saber a enseñar como aquellos contenidos que figuran en el currículo del sistema educativo, luego la transposición interna, que consiste en los cambios sufridos por el saber a enseñar al convertirse en saber enseñado, en esta transposición participa directamente el docente. La Figura 3 es utilizada por Chevallard para explicar las situaciones de transposición presentes de un saber a otro.

Chevallard (1980) presupone una clara diferencia (necesaria) entre el saber científico o erudito y el saber que forma parte del sistema didáctico, en donde la legitimidad de éste último depende de la relación que establezca desde el punto intermedio entre el saber de los académicos (saber sabio) y el saber banalizado que forma parte de la cultura y en específico, de los padres de familia. De esta

Figura 3: Transposición Externa e Interna

Transposición externa *Transposición interna*

Fuente: Chevallard (1980)

forma, ¿Cómo se puede lograr un punto intermedio entre ambos saberes?

Si se entiende claramente que en la transposición interna el principal implicado es el docente, ¿Cuáles componentes se ven involucrados en la transposición externa? ¿Existen realmente estos dos tipos de transposición?

Es evidente la necesidad de una transposición de un saber erudito a un saber a enseñar, puesto que los objetos a enseñar deben corresponder a una selección del conjunto de saberes eruditos para hacerlos corresponder con las exigencias de una sociedad. Esta correspondencia debe hacerse también con el desarrollo tecnológico social, con el sistema educativo establecido, con la formación que tengan los profesores y acorde a una epistemología dominante. Ahora bien, ¿quiénes se ven vinculados en esta selección? Chevallard (1980) define una estructura que debería ser la responsable de efectuar dicha selección y por ende, la transposición correspondiente, denominada "noosfera".

La noosfera, según Chevallard (1980), es el conjunto de lugares o instancias donde se llevan a cabo las negociaciones, donde se establecen los cambios entre el sistema educativo y su entorno, es en ella donde deben proporcionarse soluciones provisorias a los problemas que se presentan en las distintas ternas didácticas con el objetivo de converger al proyecto social definido. En la noosfera participan o deben participar asociaciones de especialistas en la disciplina, comisiones sobre la enseñanza, administraciones educativas, es decir, deben intervenir especialistas en matemática, en la enseñanza de esta disciplina, psicólogos, pedagogos, fuerzas políticas, sindicales, empresariales, entre otros.

Como puede notarse, el papel que desempeña la noosfera es fundamental y es aquí, en donde se observa que la teoría general que Chevallard propone en su teoría de 1980, tiene puntos para los cuales la generalización no aplica. En países como Costa Rica, no existe una noosfera en el sentido de Chevallard (1980), es decir, la conjugación de especialistas en el área de la matemática y el área de enseñanza, así como psicólogos, entre otros, para la creación de los planes de estudio a nivel de primaria y secundaria. Esto provoca lógicamente que no se pueda hablar realmente de una transposición externa en el sentido estricto de Chevallard, sin embargo, se puede continuar con el análisis de aquellos aspectos que tienen una aplicación directa a nuestros sistemas de enseñanza.

Se mencionó en un principio que el saber debe mantener una sutil distancia entre el saber de los matemáticos y el saber banal de una sociedad. En este sentido, Chevallard (1980) advierte un proceso de envejecimiento del saber, que provoca un distanciamiento visible del saber a enseñar respecto al saber sabio, o por otro lado, lo acerca riesgosamente al saber banalizado, de esta forma el envejecimiento se efectúa en dos sentidos:

1. Respecto al avance científico se tiene el envejecimiento biológico, que se presenta cuando los procesos investigativos dictaminan que un saber que ha formado parte del currículo escolar

es falso o carente de interés respecto de las problemáticas en el seno del campo científico.

2. Respecto a los cambios sociales, se habla del envejecimiento moral, presente cuando un saber enseñado se halla en desacuerdo con lo que dicta la sociedad, a pesar de que a la luz de la disciplina no exista ninguna incongruencia, Chevallard (1980) indica que este tipo de envejecimiento es una cuestión de época o de estado de ánimo.

El desgaste del saber enseñado respecto de ambos casos, admite como consecuencia una incompatibilización del sistema enseñado con su entorno. En el primer caso, el saber enseñado pierde legitimación ante los matemáticos, que lo consideran ajeno de los cambios contemporáneos. Además, ante el segundo caso, la sociedad cuestiona el sistema de enseñanza, al considerar que con el tiempo parecen existir saberes que llegan a ser del conocimiento absoluto de ellos y por lo tanto, estos suelen desprestigiar la labor de los docentes, argumentando que ellos mismos la pueden realizar si contaran con más tiempo para dedicarles a sus hijos. En este punto, la función de la noosfera es esencial, en tanto que debe producir un acercamiento con el saber científico y un distanciamiento del saber banalizado, lo cual vuelve a legitimar la enseñanza de la matemática.

Si se indaga sobre la transposición didáctica que se lleva a cabo en nuestro sistema educativo, se puede plantear la siguiente pregunta ¿realmente mantenemos una atenta mirada respecto a la brecha existente entre el saber académico y el saber enseñado? Chevallard (1980), define esta preocupación por vigilancia epistemológica y expone algunas ideas interesantes sobre el tema.

Se ha venido hablando sobre una transposición externa y una interna, sin embargo no se ha discutido sobre la transposición interna, que precisamente es sobre la cual participa directamente el principio de vigilancia epistemológica. Esta transposición interna es aquella en la cual el saber a enseñar se convierte en objeto de enseñanza por parte de los docentes, a través de metodologías, estrategias y libros de texto. Al ser un proceso íntimo entre el docente, el saber a enseñar y el estudiante, la supervisión o vigilancia consiste en garantizar una adecuada transposición interna, en donde no existan diferencias entre el saber a enseñar y el saber enseñado u objeto de enseñanza. La necesidad de supervisar este proceso surge de los cuestionamientos sobre la adecuación del saber a enseñar por parte del docente, pues pueden presentarse incoherencias entre dicho saber y el que es enseñado al estudiante,así estamos frente a una ruptura epistemológica que en la mayoría de ocasiones es negada por el docente.

Este principio de vigilancia lleva intrínseco un límite de receptibilidad por parte del sistema de enseñanza y los elementos que lo constituyen. Según Chevallard (1980), este límite de receptibilidad consiste en la aceptación o no, por parte del docente, de la transposición que se lleva a cabo. Por ejemplo, en caso de que el didacta identifique la creación o sustitución de objetos de enseñar a objetos enseñados, el docente puede tener la desagradable sensación de que lo hallaron realizando algo incorrecto.

La vigilancia epistemológica, puede verse a raíz de lo anterior como negativa o estéril, en tanto el didacta se presenta como un inquisidor de la labor efectuada por el docente al transponer el saber a enseñar, con el agravante de que quien efectúa este análisis está en la posición de objetar pero no da ningún aporte a su “víctima”, es decir, el profesor. Según este tipo de análisis didáctico, la transposición es percibida como algo malo, con una reacción pesimista por parte del docente.

Además, lo que realmente se busca es una adecuada transposición didáctica, en la cual la vigilancia epistemológica le imponga al enseñante cierta reserva respecto de los saberes que desea enseñar y para los cuales no existe una transposición didáctica satisfactoria. Así, bajo esta visión optimista de la transposición, lo que se pretende es generar precisamente "buenas" transposiciones de los saberes en correspondencia con las demandas didácticas de la sociedad.

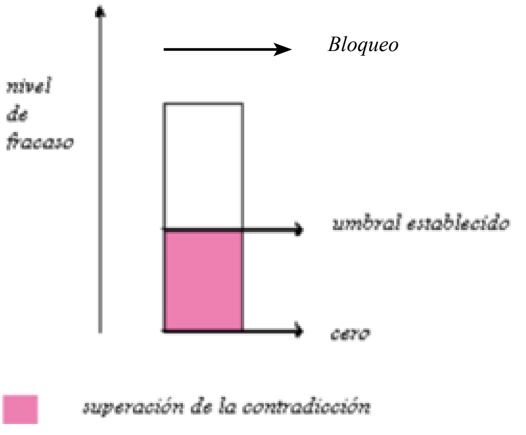
2.2 *Motor del proceso de enseñanza: la contradicción antiguo/nuevo*

Como se indicó con anterioridad, uno de los principios teóricos expuestos por Chevallard en lo que respecta al saber, lo constituye el tiempo programado para la adquisición del saber, versus el tiempo que requiere el estudiante para el aprendizaje del mismo.

Chevallard (1980) plantea que el motor del proceso de enseñanza lo constituye precisamente la contradicción antiguo/nuevo, entendida como el proceso que realiza un estudiante en la adquisición de un saber, en donde, éste pasa de un estado innovador a uno de envejecimiento, que es precisamente el que le permite apropiarse del mismo y superar dicha contradicción. El objeto de enseñanza bajo este enfoque se debate entre el pasado y el futuro, lo que le permite convertirse en un objeto transaccional.

El tiempo de superación de esta contradicción para un saber específico es muy particular para cada individuo y determina un tiempo que Chevallard (1980) denomina el tiempo de aprendizaje, en el cual el estudiante evoluciona de un bloqueo inicial a la superación de la contradicción.

Figura 4: Evolución en el tiempo de aprendizaje



Fuente: Chevallard (1980)

Como se puede observar, existe una superación de la contradicción cuando el estudiante presenta un nivel de fracaso que se encuentra por debajo de un umbral previamente establecido, es decir, no podemos considerar como superada la contradicción cuando el nivel de fracaso es cero, puesto que siempre existirá un cierto margen de fracaso. De hecho, el alcanzar un nivel cero de fracaso puede efectuarse tiempo después de haber concluido el proceso de aprendizaje del saber en cuestión. Podemos considerar, en este sentido, que la superación de la contradicción antiguo/nuevo equivale al envejecimiento de ese objeto para el estudiante.

Por otra parte, el estudiante se ubicará en una condición de bloqueo cuando, precisamente su nivel de fracaso supere el umbral mencionado anteriormente, en este caso para el estudiante, el saber enseñado siempre se presentará como un nuevo saber bajo diversas circunstancias.

Anteriormente, mencionamos que en ocasiones el proceso de enseñanza de un saber concluye antes de que la tasa de fracaso haya descendido a cero, ¿cómo podemos interpretar esta situación?, ¿significa, entonces, que el tiempo de enseñanza es distinto al tiempo de aprendizaje? Si definimos el tiempo de enseñanza a través de la organización establecida por los saberes textualizados, en la cual el conocimiento es progresivo, acumulativo e irreversible y de igual forma el tiempo en el desarrollo del saber, podemos percatarnos de la diferencia que presenta respecto al tiempo de aprendizaje, puesto que el estudiante impregna en este tiempo su subjetividad y su historia personal, lo que provoca que el tiempo de aprendizaje sea particular de cada individuo.

De esta manera, es imposible establecer un isomorfismo entre el tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje.

2.3 *Tiempo de Enseñanza versus Tiempo de Aprendizaje*

El tiempo didáctico está determinado de alguna manera por el texto del saber, es decir, la programación que el docente establezca para cada contenido que desea abordar, o bien, la distribución de temas que establezca el libro de texto que utiliza, condiciona la relación saber/duración en el proceso didáctico. Sin embargo, ese tiempo establecido por el texto del saber, que Chevallard, en el año 1980, denomina tiempo legal, es tan solo una norma que regula la aceleración, sirve de guía del progreso didáctico y es a la vez un freno.

Dado que el tiempo de enseñanza es en realidad una ficción, existe por tanto un tiempo real en el sistema didáctico, que es precisamente el tiempo de aprendizaje. En nuestras aulas, cotidianamente nos podemos percatar de la existencia de esta dicotomía, especialmente cuando después de haber enseñado un tema algunos estudiantes realizan preguntas que evidencian su desconocimiento. En ocasiones como docentes, ante tal situación, procedemos a ignorar el problema y continuar con nuevos conocimientos, con la esperanza de que el bloqueo de esos estudiantes pueda subsanarse en la evolución y desarrollo de otros saberes.

Hasta el momento, tenemos claro que el tiempo de aprendizaje es muy distinto al tiempo de enseñanza, no obstante, esta diferenciación no se hace explícita por el enseñado y más bien por el contrario la ficción del tiempo didáctico es necesaria para el proceso didáctico. Así la distinción entre enseñante y enseñado podemos palparla desde dos posiciones:

- ambos ocupan posiciones distintas en relación a la dinámica de la duración del saber, el enseñante es el que sabe y puede anticipar, esto es llamado la cronogénesis.

- están ubicados en posiciones distintas en relación con el saber en construcción, esto se conoce como la topogénesis.

En matemática, la diferencia entre lo que sabe el profesor y lo que sabe el estudiante es mucho más marcada por las características de esta disciplina, de este modo existen dos regímenes del saber. Existe el saber enseñado y el saber a aprender y entre ambos la diferencia es grande, existe por lo tanto para un mismo objeto de saber una versión para el profesor y una versión para el estudiante, la coexistencia y la articulación de estas dos versiones crea lo que se llama una situación transaccional. Esta situación genera una serie de dificultades para el proceso de enseñanza en donde la salida más común es la algoritmización.

Por ejemplo, supongamos que un programa de estudio ficticio, propone el análisis de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ entonces para el profesor estará reservada la teoría en lo que respecta al análisis del número real $\Delta = b^2-4ac$ y que de él dependa la existencia o no de raíces reales, de igual forma, porqué la ecuación tiene a lo sumo dos raíces reales y si no tiene soluciones reales, cuáles son las otras soluciones, entre otros. Mientras que el estudiante se limitará a un algoritmo determinado, en el cual encuentra el número $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ y memoriza que:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{dos raíces reales distintas}$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{dos raíces reales iguales}$$
$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{no tiene raíces reales.}$$

Inclusive, el estudiante deberá tener presente en este algoritmo que en caso de obtener $\Delta > 0$ las soluciones estarán dadas por la expresión $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, en la mayoría de ocasiones sin percatarse siquiera del significado real de *x,* como solución y por ende cero de la ecuación cuadrática.

3. METODOLOGÍA

La investigación realizada es de tipo documental, Vickery (1970) señala que

> Los métodos de recuperación, entre los que se cuenta con el análisis documental, responden a tres necesidades informativas de los usuarios, en primer lugar, conocer lo que otros pares científicos han hecho o están realizando en un campo específico, en segundo lugar, conocer segmentos específicos de información de algún documento en particular; y por último, conocer la totalidad de información relevante que exista sobre un tema específico (Peña y Pirella,2007, p.154).

Pinto (1992) añade que el análisis documental es “el complejo de operaciones que afectan al contenido y a la forma de los documentos originales, para transformarlos en otros documentos representativos de aquellos, que facilitan al usuario su identificación precisa, su recuperación y su difusión” (Peña y Pirella, 2007, p.89).

En este sentido, la investigación se evocó en una revisión documental de los fundamentos teóricos de la transposición didáctica, teoría propuesta por Ive Chevallard (1980), asimismo, en consultar libros y documentos matemáticos que evidencien la construcción que se establece para el conjunto de los números enteros desde el punto de vista de clases de equivalencia. Además, se revisaron los objetivos y contenidos propuestos por el Ministerio de Educación Pública costarricense respecto al tema de números enteros para el nivel de sétimo año, así como los contenidos y propuestas metodológicas establecidas en dos libros de texto utilizados por los docentes de secundaria en el nivel de sétimo año para el desarrollo del tema de los números enteros.

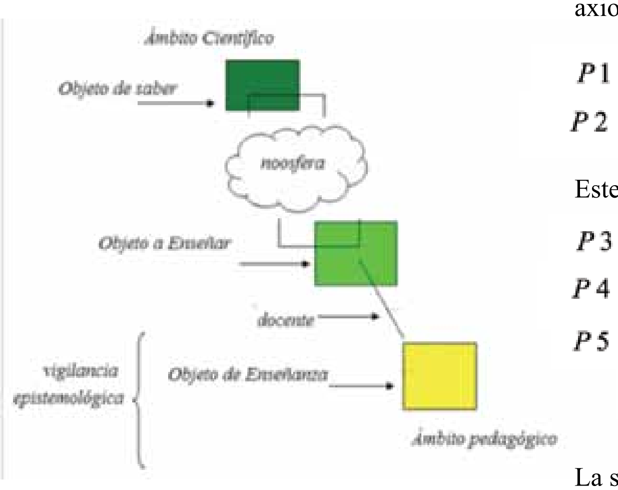
No obstante, los propósitos de un análisis documental, trascienden obviamente la mera revisión y difusión de la información, sino que busca facilitar la cognición y el aprendizaje del individuo para encontrar soluciones que permitan analizar y argumentar diversas condiciones en un ámbito de acción, en este caso el educativo.

De esta forma, a partir de la investigación documental se analizará la coherencia y concordancia existente entre la construcción del conjunto de los números enteros planteada por científicos matemáticos, los objetivos y contenidos que estipula el MEP en relación con este tema para secundaria y los contenidos y propuestas metodológicas que plantea un libro de texto. Dicho análisis se realizará a la luz de lo que establece Chevallard (1980) como una adecuada transposición didáctica, al contrastar cada objetivo planteado con los distintos saberes.

4. ANÁLISIS

El siguiente esquema ilustra el proceso de transposición que debería tener el tema de los números enteros en la enseñanza de nuestro país:

Figura 5: Intervención de la noosfera y la vigilancia epistemológica en la transposición de un saber



Fuente: Alfaro, C; Chavarría, J. (2011)

A continuación, se efectuará una descripción del saber a enseñar, del saber científico y del saber enseñado correspondiente a cada uno de los objetivos expuestos en el Plan de Estudios de Matemática del MEP para sétimo año del año 2005 y se efectuará un análisis comparativo de la coherencia entre dichos saberes.

4.1 Análisis del primer objetivo:Describir el conjunto de los números enteros negativos

4.1.1 Saber a enseñar

Para este objetivo, el programa establece como contenidos el conjunto de los números enteros negativos con temas como la notación simbólica de los números enteros negativos, representación de los números enteros negativos en la recta numérica, símbolo y notación por extensión del conjunto de los números enteros.

4.1.2 Saber científico

Respecto a este objetivo, el saber científico considera en primer lugar, un conjunto no vacío llamado el conjunto de los números naturales, denotado que satisface los siguientes axiomas, llamados *Axiomas de Peano*[1]

$P1\ \ 1\in\mathbb{N}$

$P2\ \ \forall n\in\mathbb{N}\left(\exists! n^{*}\in\mathbb{N}\right)$

Este elemento n^{*} se llama siguiente de n.

$P3\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \left(n^{*}\neq 1\right)$

$P4\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}\ \left(m^{*}=n^{*}\ \Rightarrow\ m=n\right)$

$P5\ \ \forall A\in P(\mathbb{N})\left[\ \left(1\in A\ \wedge\ \forall n\in\mathbb{N}\ \left(n\in A\ \Rightarrow\ n^{*}\in A\right)\right)\Rightarrow\ A=\mathbb{N}\right]$

La suma o adición en se define por:

1. $\forall n\in\mathbb{N}\left(n+1=n^{*}\right)$

2. $\forall m,n\in\mathbb{N}\left(m+n^{*}=(m+n)^{*}\right)$

   siempre que $(m+n)\in\mathbb{N}$.

Luego, se demuestra que para cualesquiera $m,n,p\in\mathbb{N}$ se satisface que: $(m+n)\in\mathbb{N}$, $m+n=n+m$,
$(m+n)+p=m+(n+p)$,
$m+p=n+p\ \Rightarrow\ m=n$.

Asimismo, se define el producto como sigue:

1. $\forall m\in\mathbb{N}\left(m\cdot 1=m\right)$

[1] Estos axiomas se deben al matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) y sobre ellos se han apoyado muchas construcciones rigurosas del Álgebra y del Análisis.

2. $\forall m, n \in \mathbb{N} \ (m \cdot n^{*} = m \cdot n + m)$

siempre que $m \cdot n \in \mathbb{N}$

Del mismo modo, se prueba que para cualesquiera $m, n, p \in \mathbb{N}$ se satisface que: $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$, $m \cdot n = n \cdot m$, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$, $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$. A partir del sistema de los números naturales, se plantea la construcción del conjunto de los números enteros. Para ello, se considera el conjunto $L = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y sobre él se define la siguiente relación binaria:
$\forall (a,b),(c,d) \in L \ [(a,b)\alpha\ (c,d) \Leftrightarrow a+c=b+d]$.
Se puede demostrar que esta relación es una relación de equivalencia en L, el conjunto cociente $\Delta = L/\alpha$ se llama el conjunto de los números enteros y se denota Luego se dota a este conjunto de suma y producto tal y como sigue:

1. $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$

2. $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)}$

Con base en esto se pueden demostrar todas las propiedades usuales de las operaciones de los números enteros. Finalmente, la relación de orden se plantea así: $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Leftrightarrow a+d<b+c$ e n donde el símbolo $<$ en el lado derecho de la doble implicación representa el orden en los naturales. Con base en esta introducción se puede hacer la distinción entre los números enteros positivos y los negativos. En efecto, el conjunto $\mathbb{Z}^{+} = \left\{\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z} : a > b\right\}$ representa al conjunto de enteros positivos y el conjunto $\mathbb{Z}^{-} = \left\{\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z} : a < b\right\}$ representa el conjunto de los enteros negativos.

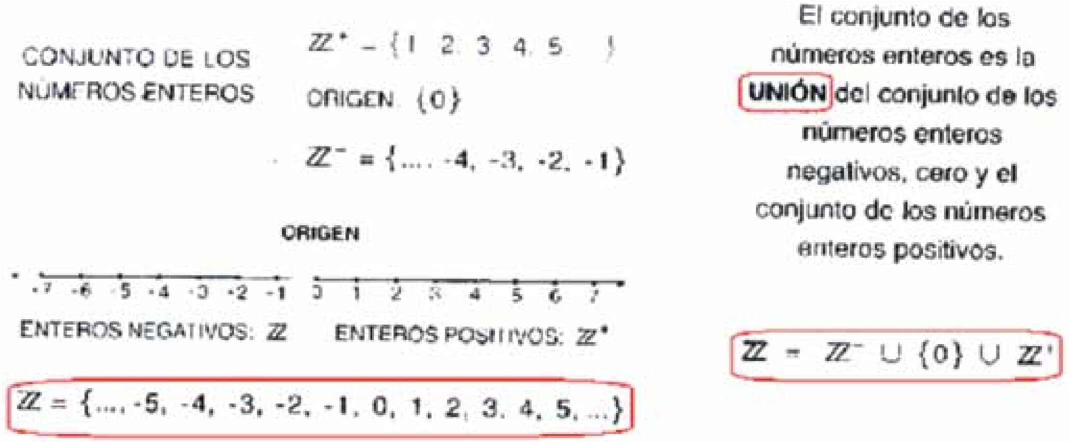
4.1.3 *Saber enseñado*

El libro consultado plantea inicialmente, a modo de introducción, la noción de números negativos de forma intuitiva, para ello utiliza situaciones como fuerzas opuestas que actúan en un punto determinado, en contabilidad las ganancias y pérdidas, o bien, en el recorrido de dos automóviles que parten del mismo punto y recorren una misma cantidad en sentidos opuestos. Finalmente, concluyen con el ejemplo de temperatura, para indicar grados en sentido positivo, grados en sentido negativo o el cero grados que plantean que no tiene sentido.

Además, en lo que refiere a la notación simbólica utilizada para el conjunto de los números enteros negativos, este tema se aborda para el conjunto de los números enteros en su totalidad, de forma que se indica cómo asociar cada punto de la recta numérica con dichos números, sin embargo, este proceso se realiza sólo indicando cuál debe ser su posición respecto al origen. Textualmente, tenemos que: "Cada número entero positivo lo asociaremos con un punto a la derecha del origen en una semirrecta. Así formamos el conjunto de todos los enteros positivos, al cual simbolizaremos con $\mathbb{Z}^{+}$." De igual forma se especifica para el conjunto de los números enteros negativos.

Así, se denotan los números enteros a través de la teoría conjuntista, como se puede notar en la siguiente figura, pero no se clarifica porqué se utiliza dicha notación.

Figura 6: Extracto de un libro de texto sobre la notación del conjunto de los números enteros



Fuente: Meneses, R. (2003). Matemática, Enseñanza-aprendizaje. Editorial NORMA, CR

4.1.4 Análisis del primer objetivo

Se observa en primer lugar un claro distanciamiento entre el saber científico y el saber a enseñar, en el cual se puede evidenciar una omisión por parte del saber a enseñar del origen de dicho conjunto numérico. Es claro que introducir clases de equivalencia en este nivel representaría un cambio en la concepción matemática desde primaria, y la intención no es retroceder a la matemática moderna que mostró claras dificultades en los años de su aplicación. Sin embargo, en función de mantener al menos el carácter estructural, debería conformar el saber a enseñar y el saber enseñado componentes del origen de dicho conjunto.

En lo que refiere del saber a enseñar al saber enseñado propuesto en el libro de texto, este último mantiene total coherencia con lo que establece el objetivo del MEP, sin que esto indique que la propuesta metodológica sea la más indicada, puesto que existen vacíos conceptuales de la teoría de conjuntos que se asumen de forma literal, si se quiere memorística y no asciende a un nivel de profundidad mayor.

4.2 Análisis del segundo objetivo: Caracterizar al conjunto de los números enteros

4.2.1 Saber a enseñar

Simbología y notación por extensión, representación en la recta numérica de números enteros negativos y positivos, incluyendo al cero, subconjuntos, valor absoluto de un número entero, opuesto de un número entero, antecesor y sucesor de un número entero, infinitud del conjunto $\mathbb{Z}$.

4.2.2 Saber científico

Según se expuso anteriormente la definición de la relación de orden en el conjunto de los números enteros permite definir al conjunto de los números enteros positivos y a los enteros negativos. Además, dado $a \in \mathbb{N}$ considérese el número entero $\overline{(a,a)}$, luego $\overline{(a,a)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,a+d)}=\overline{(c,d)}$ y $\overline{(a,a)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+ad,ad+ac)}=\overline{(a,a)}$ el número entero $\overline{(a,a)}$ se le llama cero y se denota por 0. Dado el número entero $\overline{(a,b)}$

se tiene que existe el número entero $\overline{(b, a)}$ tal que $\overline{(a,b)}+\overline{(b,a)}=\overline{(a+b, b+a)}$. En consecuencia los números enteros $\overline{(a, b)}$ y $\overline{(b, a)}$ son opuestos aditivos y se puede escribir que: $\overline{(a, b)} = -\overline{(b, a)}$.

Tenemos así que la estructura algebraica $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo abeliano, la estructura algebraica $(\mathbb{Z},\cdot)$ es asociativa, conmutativa, posee elemento neutro, $\overline{(1, 0)}$ y además el producto es distributivo respecto a la suma, por lo tanto, la estructura algebraica $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

4.2.3 Saber enseñado

Como se mencionó anteriormente, en el primer objetivo, los contenidos sobre la notación, simbología y representación en la recta numérica se abordan desde los números enteros positivos y negativos. Para tratar los subconjuntos se analizan las relaciones de inclusión y pertenencia, pero sólo se mencionan, sin profundizar sobre el significado de subconjunto o pertenece a.

El concepto de infinitud se aborda al indicar simplemente que no tiene ni primero ni último elemento.

Además, se indica que los números enteros consecutivos aumentan y disminuyen de uno en uno, de forma que disminuyen indefinidamente o aumentan indefinidamente.

El concepto de discreto es introducido a través de una breve reseña de Peano, e incluso se reproduce (de mala forma) el principio de inducción, pero sin llegar a ninguna conclusión que permita la comprensión del proceso de inducción.

Así, se menciona que "el conjunto de los números enteros es discreto porque entre dos números enteros consecutivos, no hay otro número entero" y se ofrece la definición de sucesor y de antecesor.

4.2.4 Análisis del segundo objetivo

Al caracterizar el conjunto de los números enteros, el saber científico establece precisamente aquellas condiciones que diferencian al conjunto, como grupo y estructura algebraica. Sin embargo, los contenidos del saber a enseñar, así como aquellos del saber enseñado planteado en el libro de texto no corresponden a una caracterización del conjunto, sino a propiedades de inclusión entre conjuntos, o bien, funciones como el valor absoluto, el sucesor o el antecesor de un número entero.

Al omitir las propiedades del elemento neutro, del elemento opuesto, de la conmutatividad, asociatividad, distributividad, entre otras, podría ser una de las causas que provocan que en el momento de abordar la resolución de ecuaciones los métodos de resolución sean tan artificiales y misteriosos, como el llamado "pasar al otro lado de la igualdad a restar o sumar", como si se tratara de "pasar un puente". Los subconjuntos del conjunto de los números enteros, así como la infinitud de dicho conjunto, no fueron analizados desde el punto de vista matemático, porque no corresponden al objetivo establecido.

En lo que refiere del saber a enseñar al saber enseñado propuesto en el libro de texto, el contenido estipulado en el saber a enseñar no posee mayor especificidad, lo cual trae como consecuencias una vaga y metódica introducción al concepto de inclusión y pertenencia entre conjuntos.

4.3 Análisis del tercer objetivo: Establecer relaciones de orden entre los números enteros

4.3.1 Saber a enseñar

Las relaciones de orden en, relaciones "menor que", "mayor que", "estar entre", "igual que".

4.3.2 Saber científico

Con la relación de orden definida por $\overline{(a,b)}<\overline{(c,d)} \Leftrightarrow a+d<b+c$ se puede probar la llamada ley de tricotomía la cual establece que dados dos números enteros $\overline{(a,b)}$ y $\overline{(c,d)}$ se cumple que: $\overline{(a,b)}<\overline{(c,d)}$ ó $\overline{(a,b)}>\overline{(c,d)}$ o $\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$. Además, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\left(a<b \Leftrightarrow \exists\, p\in\mathbb{N}\,(\,a+p=b\,)\right),$$

$$\forall n\in\mathbb{Z}\left(\nexists\, m\in\mathbb{Z}\;\;(n<m<n+1)\right),$$

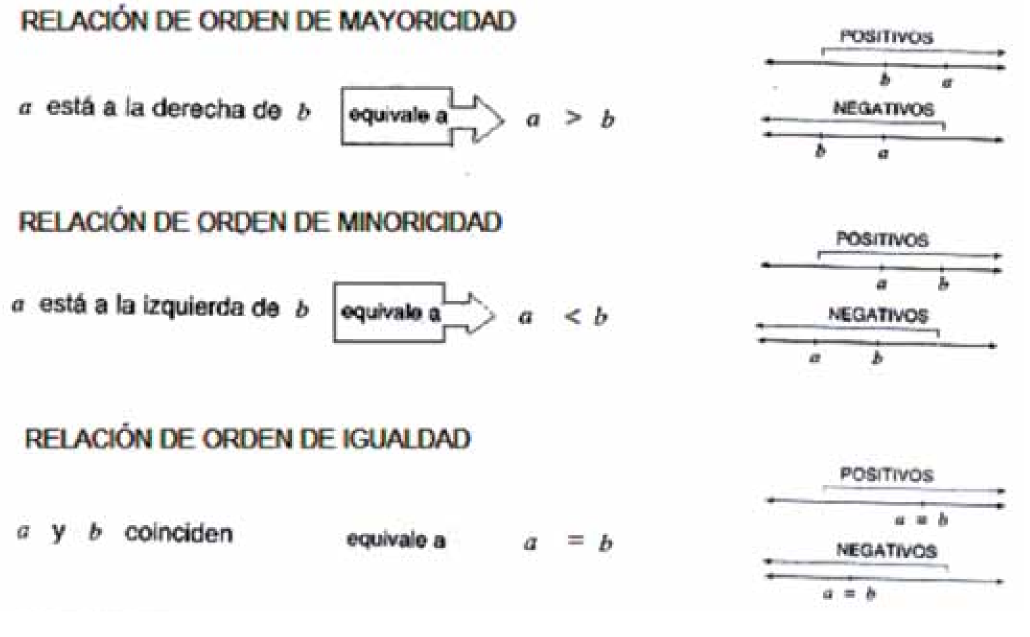
$$\forall m,n\in\mathbb{Z}\left(\,m<n \;\;\Rightarrow\;\; m+1\leq n\right),$$

entre otras. También es posible definir el valor absoluto de un número entero como sigue, dado $a\in\mathbb{Z}$ el valor absoluto de a es el número entero denotado $|a|$ y definido por : $|a|=a$ si $a\geq 0$ y $|a|=-a$ si $a<0$.

4.3.3 Saber enseñado

Se introduce la relación de orden entre números negativos de forma intuitiva y luego se trata de formalizar a través de la posición que ocupan dos números respecto de la recta numérica, como puede notarse en la siguiente Figura 7.

Figura 7: Extracto del libro de texto sobre la relación de orden en el conjunto de los números enteros



Fuente: Meneses (2003). Matemática, Enseñanza-aprendizaje. Editorial NORMA, CR

Además, se ofrece la relación de estar entre para justificar que entre dos números enteros no consecutivos, hay al menos otro número entero.

4.3.4 Análisis del tercer objetivo

Respecto a este último objetivo, en función de que el objetivo y los contenidos que establece el MEP no muestran mayor especificidad, se puede decir que existe coherencia entre el saber científico y el saber a enseñar. No obstante, si se analiza el libro de texto se puede observar un claro distanciamiento entre el objetivo y la propuesta metodológica para alcanzar dicho objetivo, en el cual las relaciones de orden en el conjunto de los números enteros quedan determinadas únicamente por su posición en la recta numérica, es decir, la relación de orden queda limitada a una ubicación espacial o en el plano y no a un significado matemático.

5. CONCLUSIÓN

A partir del análisis efectuado, se evidencia la distancia existente entre cada uno de los saberes vinculados a la enseñanza y aprendizaje de los fundamentos del conjunto de los números enteros en el nivel de sétimo año de la educación costarricense. Particularmente, es preocupante la forma en la cual el libro de texto seleccionado aborda cada uno de los contenidos propuestos por el currículo escolar, en donde la perspectiva reduccionista de la matemática a memorización y procesos algoritmos queda plasmada.

Los objetivos propuestos por el programa de sétimo año del Ministerio de Educación Pública, son muy generales lo que puede permitir abordajes muy profundos o tan generales como los mismos objetivos.

En la actualidad, es reconocido a través del trabajo de algunos investigadores, que la sociología de los programas de enseñanza, a nivel de contenido, no pueden basarse únicamente en los saberes sabios producidos por la comunidad científica, sino que deben considerar las demandas sociales, para el mismo Chevallard, el saber a enseñar debe ser discutido y avalado en la noosfera, la cual determinará los objetivos y contenidos de la enseñanza no sólo a partir del saber sabio, sino considerando los factores sociales y culturales inmersos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El problema, en este sentido, con nuestro sistema educativo ha sido la ausencia de una noosfera, bajo el concepto de Chevallard, que regule el saber a enseñar y el saber enseñado, privada de intereses políticos.

Lo anterior conduce a un segundo factor de incoherencia entre los distintos saberes, en donde, en el afán de abarcar la mayor cantidad de contenidos del saber sabio, estos son incorporados al programa de enseñanza sin cuestionar antes su pertinencia o bien, evaluar su factibilidad como objeto de enseñanza.

En el momento en el cual, se cuente con una noosfera integrada por especialistas en las áreas de la disciplina y enseñanza, que analicen los programas de estudio y los actualicen, considerando no solo el saber científico, sino los factores de demanda social y factibilidad, se contará con un sistema educativo atractivo y de mayor coherencia.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*(traducción de tesisde doctoral), Universidad de Córdoba, Argentina.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research.*Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *1*, 146-157.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires: Aique.

La Madriz, J. (2006). Una aproximación didáctica al estudio del saber enseñado en el acto didáctico. Segunda etapa de Educación Básica. *Revista Ciencias de la Educación*, *2(28)*, 25-42.

Peña, T; Pirella, J. (2007). La complejidad del análisis documental. *Información Cultura y Sociedad*, *16*, 55-81.

Plantueux, J. (1988). *Wolfgang, tu ferasinformatique*!, Francia: La Découverte/Le Monde

Ministerio de Educación Pública. *Programas de estudio Matemática III Ciclo,2005*. San José: Costa Rica.
Meneses, R. (2003). *Matemática, Enseñanza-aprendizaje*. Costa Rica: NORMA.