UNICIENCIA 4 (1-2)
pp. 59-67
1987

ALGUNAS PROPIEDADES MATRICIALES UTILES EN ESTADISTICA

Jorge Poltronieri
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica

RESUMEN

En el estudio de formas lineales y cuadráticas se dificulta el cálculo al tener que recurrir a notaciones vectoriales de matrices. Aquí proponemos una herramienta útil para expresar las covarianzas en forma simple. Se hace necesario definir productos similares al producto de Kronecker de matrices y estudiamos sus propiedades.

ABSTRACT

We define products for matrices similar to the Kronecker product and study their properties. We show that this product are usefull to express the covariances in a simple form.

En el estudio de las covarianzas de formas cuadráticas y lineales se dificulta la escritura de la covarianza al tener que recurrir a notaciones vectoriales de matrices. Sin embargo en este artículo proponemos una herramienta útil para poder expresar dichas covarianzas en forma simple. Se hace necesario definir productos similares al producto de Kronecker de matrices y se estudian sus propiedades matriciales.

Notaciones y definiciones

1) Se define el producto de Kronecker de matrices A_{nm} y B_{pq} por:

$$A \otimes B = (a_{ij}B)$$

i.e. se identifica la entrada ijkl de la matriz $A\otimes B$ por la entrada kl del bloque ij, es decir:

$$(A\otimes B)_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$$

2) Se define el producto asimétrico de Kronecker de las matrices A_{nm} y B_{pq} por:

$$(A\dot{\otimes}B)_{ijkl} = a_{il}b_{kj} = (A\otimes B)_{ilkj}$$

i.e. se identifica la entrada ijkl de la matriz $A\dot{\otimes}B$ por la entrada ilkj de la matriz $A\otimes B$.

3) Similarmente se define el producto antisimétrico de Kronecker de las matrices A_{nm} y B_{pq} por:

$$(A\ddot{\otimes}B)_{ijkl} = a_{ik}b_{jl}$$

Observemos que estas definiciones implican de inmediato las propiedades siguientes:

$$(A\otimes B)' = A'\otimes B'$$

$$(A\dot{\otimes}B)' = B'\dot{\otimes}A'$$

$$(A\ddot{\otimes}B)' = B\ddot{\otimes}A$$

Si consideramos la matriz aleatoria $X = (X_1,\dots,X_p)$ de tamaño nxp denotamos:

$$\mathrm{Vec}(X) = [X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \qquad \text{vector npx1}$$

<u>Propiedades</u>

1) $[BXC] = C'\otimes B\,[X]$

Observemos que si $X \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ entonces:

$$\mathrm{cov}(XB,XA) = E(B'\otimes I\,[\overset{\circ}{X}]\,[\overset{\circ}{X}]'A\otimes I) = B'\otimes I\; V\otimes\Sigma\; A\otimes I = B'VA\otimes\Sigma.$$

donde $\overset{\circ}{X}$ es la matriz aleatoria centrada de X.

2) $\underline{[A]\,[B]' = A'\hat{\otimes}B'}$

i.e. $\mathrm{cov}(X,Z) = E(X'\hat{\otimes}Z') - E(X')\hat{\otimes}E(Z')$.

$\mathrm{Var}(X) = E(\overset{\circ}{X}'\hat{\otimes}\overset{\circ}{X}') = V\otimes\Sigma$

En efecto la entrada ijkl de $\overset{\circ}{X}'\hat{\otimes}\overset{\circ}{X}'$ es $\overset{\circ}{x}_{ki}\overset{\circ}{x}_{lj}$ i.e. $E(\overset{\circ}{x}_{ki}\overset{\circ}{x}_{lj}) = v_{ij}\sigma_{kl}$

3) Si x,y,z,q son vectores entonces:

$$\underline{[xy']\,[zq']' = yq'\otimes xz' = xy'\hat{\otimes}zq'}$$

4) Sea H_{ij} la matriz nxp tal que la entrada ij tiene 1 y las demás 0, i=1,...,n ; j=1,...,p. Sea la matriz K definida por:

$$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij}\otimes H'_{ij}$$

entonces:

$$\underline{A\hat{\otimes}B = KB\otimes A = A\otimes BK'}$$

<u>Nota</u>: Bien que K = K' usaremos la notación K' para indicar cómo tomar la matriz afín de que el producto tenga sentido directo.

En efecto: $KB\otimes A = \sum_{st} H_{st}B\otimes H'_{st}A$ i.e. la entrada ij de $H_{st}B$ y la entrada kl de $H'_{st}A$ son:

$$(H_{st}B)_{ij} = \sum_{u=1}^{p} h^{st}_{iu}b_{uj} = \delta_{si}b'_{tj}$$

$$(H'_{st}B)_{kl} = \sum_{u=1}^{n} h^{ts}_{ku}a_{ul} = \delta_{kt}a_{sl}$$

por lo que:

$$(A\hat{\otimes}B)_{ijkl} = \sum_{st}\delta_{si}b_{tj}\delta_{kt}a_{sl} = a_{il}b_{kj}$$

Similarmente para $\sum_{st} AH'_{st} \otimes BH_{st}$ la entrada ij de AH'_{st} y la entrada kl de BH_{st} son:

$$(AH'_{st})_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} h_{uj}^{ts} = a_{it}\delta_{sj}$$

$$(BH_{st})_{kl} = \sum_{u=1}^{q} b_{ku} h_{ul}^{st} = b_{ks}\delta_{tl}$$

i.e. $$\sum_{st} a_{it}\delta_{sj} b_{ks}\delta_{tl} = a_{il} b_{kj}$$

5) $KK = KK' = I_{np} = I_n \otimes I_p = I_p \otimes I_n$

En efecto $$KK' = \sum_{ijkl} H_{ij}H'_{kl} \otimes H'_{ij}H_{kl} = \sum_{ilkj} \delta_{kj}M_{il} \otimes \delta_{il}N_{jk} = \sum_{ij} M_{ii} \otimes N_{jj} =$$

$$= I_n \otimes I_p$$

donde las matrices M_{il} y N_{jk} son nxn y pxp respectivamente, definidas como H_{ij}.

6) a) $C\otimes D \; A\hat{\otimes}B = CA\hat{\otimes}DB$

b) $A\hat{\otimes}B \; E\otimes F = AF\hat{\otimes}BE$

c) $A\hat{\otimes}B \; C\hat{\otimes}D = AD\otimes BC$

d) $K'A\hat{\otimes}B = B\otimes A$

e) $A\hat{\otimes}B \; K = A\otimes B$

En efecto:

a) $C\otimes D \; A\otimes B \; K' = CA\otimes DB \; K' = CA\hat{\otimes}DB$

b) $K \; B\otimes A \; E\otimes F = K \; BE\otimes AF = AF\hat{\otimes}BE$

c) $A\otimes B \; K'K \; D\otimes C = AD\otimes BC$

Las partes e y d son inmediatas de la definición.

7) Sea R_{ij} y J_{uv} matrices mxp y nxq respectivamente definidas como H_{st}

entonces:

$$\underline{A\ddot{\otimes}B = \sum_{ij} AR_{ij}\otimes R_{ij}B = \sum_{uv} J_{uv}B'\otimes A'J_{uv}}$$

En efecto: $$(AR_{st})_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}r^{st}_{uj} = a_{is}\delta_{tj}$$

$$(R_{st}B)_{kl} = \sum_{u=1}^{p} r^{st}_{ku}b_{ul} = \delta_{sk}b_{tl}$$

i.e. la entrada ijkl de $A\ddot{\otimes}B$ es $\sum_{st} a_{is}\delta_{tj}\delta_{tk}b_{tl} = a_{ik}b_{jl}$

Similarmente:

$$(J_{st}B')_{ij} = \sum_{u=1}^{q} J^{st}_{iu}b'_{uj} = \delta_{it}b_{js}$$

$$(A'J_{st})_{kl} = \sum_{u=1}^{n} a'_{ku}J^{st}_{ul} = a_{tk}\delta_{tl}$$

por lo tanto:

$$\sum_{st} a_{tk}\delta_{tl}\delta_{it}b_{js} = a_{ik}b_{jl}$$

8) Sea C_{pw} , D_{qz} , E_{wm} , F_{zm} matrices, entonces:

$$\underline{A\ddot{\otimes}B\ C\otimes D = A\ddot{\otimes}C'BD}$$

$$\underline{E\otimes F\ A\ddot{\otimes}B = EAF'\ddot{\otimes}B}$$

En efecto: $$A\ddot{\otimes}B\ C\otimes D = \sum_{st} AR_{st}C\otimes R_{st}BD$$

Así:

$$(AR_{st}C)_{ij} = \sum_{uv} a_{iu}r^{st}_{uv}c_{vj} = a_{is}c_{tj}$$

$$(R_{st}BD)_{kl} = \sum_{uv} r^{st}_{ku}b_{uv}d_{vl} = \delta_{sk}(BD)_{tl}$$

por lo que obtenemos:

$$\sum_{st}\delta_{sk}a_{ik}c_{tj}(BD)_{tl} = a_{ik}(C'BD)_{jl}$$

Similarmente se demuestra la otra igualdad utilizando las propiedades de la transpuesta.

9) Sean las matrices C_{pn} , D_{qm} o C_{pm} , D_{qn} y sean las matrices E_{mp}, F_{nq} o E_{np} , F_{mq} entonces:

$$\underline{A\ddot{\otimes}B\ C\dot{\otimes}D = A\ddot{\otimes}D'B'C}$$

$$\underline{E\dot{\otimes}F\ A\ddot{\otimes}B = EA'F'\ddot{\otimes}B}$$

En efecto: $A\ddot{\otimes}BC\otimes DK' = A\ddot{\otimes}C'BD\ K' = A\ddot{\otimes}D'B'C$

Corolario: $\underline{A\ddot{\otimes}B\ K' = A\ddot{\otimes}B'}$ $\qquad$ $\underline{KA\ddot{\otimes}B = A'\ddot{\otimes}B}$

10) Sean las matrices C_{pq} y D_{mn} entonces:

$$\underline{A\ddot{\otimes}B\ C\ddot{\otimes}D = tr(BC')\ A\ddot{\otimes}D}$$

En efecto: Sea K_{st} una matriz qxn similar a R_{ij} por lo que:

$$C\ddot{\otimes}D = \sum_{st} CK_{st}\otimes K_{st}D$$

Así tenemos que el producto es:

$$\sum_{xyst} AR_{xy}CK_{st}\otimes R_{xy}BK_{st}D$$

$$-\quad \sum_{uvz} a_{iu}r^{xy}_{uv}c_{vz}k^{st}_{zj} = a_{ix}c_{ys}\delta_{tj}$$

$$-\quad \sum_{uvz} r^{xy}_{ku}b_{uv}k^{st}_{vz}d_{zl} = \delta_{kx}b_{ys}d_{tl}$$

$$\text{i.e.}\quad \sum_{xyst} a_{ix}c_{ys}\delta_{tj}\delta_{kx}b_{ys}d_{tl} = a_{ik}d_{jl}tr(BC')$$

11) Sabemos que $K = K'$ i.e. $KK' = I_{np}$ por lo que $\det K = 1$.

Sean las matrices A_{nn} y B_{pp} entonces:

i) $\underline{\det(A\hat{\otimes}B) = \det K\ \det B\otimes A = \det A^{p}\det B^{n} = \det A\otimes B}$

ii) $\underline{A^{-1}\otimes B^{-1}A\hat{\otimes}B = I_n\hat{\otimes}I_p}$

iii) $(A\hat{\otimes}B)^{-1} = B^{-1}\hat{\otimes}A^{-1}$

iv) $tr(A\hat{\otimes}B) = tr(AB)$, $tr(A\ddot{\otimes}B) = tr(AB')$ si A y B son nxn.

v) $I_n\hat{\otimes}\, I_p = K$

12) i) $I_n\ddot{\otimes}\, I_p = \sum_{ij} R_{ij}\otimes R_{ij} = \sum_{uv} J_{uv}\otimes J_{uv}$

ii) $rang(I_n\ddot{\otimes}I_p) = 1$ por lo que $A\ddot{\otimes}B$ es singular i.e. $rang(A\ddot{\otimes}B) = 1$.

Cálculo de covarianzas

En esta sección vamos a calcular algunas covarianzas, afin de poder verificar la importancia de la herramienta que se ha desarrollado.

Consideremos $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ entonces:

- $cov(KYA,HYB) = A'VB\otimes K\Sigma H'$

En efecto:

$$cov(KYA,HYB) = E(A'\mathring{Y}'K'\ddot{\otimes}B'\mathring{Y}'H') = A'\otimes KE(\mathring{Y}'\ddot{\otimes}\mathring{Y}')B\otimes H' =$$

$$A'\otimes K\; V\otimes\Sigma\; B\otimes H' = A'VB\otimes K\Sigma H'$$

- $cov(YAY',YBY') = E\{(YAY'-\Gamma A\Gamma'-\Sigma tr(AV))'\ddot{\otimes}(YBY'-\Gamma B\Gamma'-\Sigma tr(BV))'\} =$

$$E(\mathring{Y}A\mathring{Y}'+\Gamma A\mathring{Y}'+\mathring{Y}A\Gamma'-\Sigma tr(AV))\ddot{\otimes}(\mathring{Y}B\mathring{Y}'+\Gamma B\mathring{Y}+\mathring{Y}B\Gamma'-\Sigma tr(BV)) =$$

$$= tr(AVBV)\Sigma\otimes\Sigma + tr(AVBV)\Sigma\hat{\otimes}\Sigma + tr(AV)tr(BV)\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma - tr(AV)tr(BV)\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma +$$

$$\Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma + \Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma' + tr(AV)tr(BV)\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma - tr(AV)tr(BV)\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma +$$

$$\Sigma\hat{\otimes}\Gamma AVB\Gamma' + \Gamma AVB\Gamma'\hat{\otimes}\Sigma \,.$$

Así pues tenemos que:

$$cov(YAY',YBY') = tr(AVBV)(\Sigma\otimes\Sigma+\Sigma\hat{\otimes}\Sigma) + \Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma + \Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma' +$$

$$\Gamma AVB\Gamma'\hat{\otimes}\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Gamma AVB\Gamma'$$

Vamos ahora a calcular la covarianza entre las formas cuadráticas $KYAY'K'$ y $B'Y'HYB$.

$$\mathrm{cov}(KYAY'K', B'Y'HYB) = K\otimes K\ \mathrm{cov}(YAY', Y'HY)\ B\otimes B$$

El término del medio de la expresión derecha es:

$$E(\mathring{Y}A\mathring{Y}'+\Gamma A\mathring{Y}'+\mathring{Y}A\Gamma'-\Sigma\mathrm{tr}(AV))\ddot{\otimes}(\mathring{Y}'H\mathring{Y}+\Gamma'H\mathring{Y}+\mathring{Y}'H\Gamma-V\mathrm{tr}(H\Sigma))$$

y los términos no nulos son:

$$E(\mathring{Y}A\mathring{Y}'\ddot{\otimes}\mathring{Y}'H\mathring{Y}) = \Sigma H\Sigma\ddot{\otimes}VAV + \mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(\Sigma H)\Sigma\ddot{\otimes}V + \Sigma H\Sigma\ddot{\otimes}VAV$$

$$-E(\mathring{Y}A\mathring{Y}')\ddot{\otimes}V\ \mathrm{tr}(H\Sigma) = -\mathrm{tr}(H\Sigma)\mathrm{tr}(AV)\Sigma\ddot{\otimes}V$$

$$E(\Gamma A\mathring{Y}'\ddot{\otimes}\Gamma'H\mathring{Y}) = \Gamma A\otimes I\ E(\mathring{Y}'\ddot{\otimes}\mathring{Y})\ H\Gamma'\otimes I = \Gamma AV\hat{\otimes}\Sigma H\Gamma'$$

$$E(\Gamma A\mathring{Y}'\ddot{\otimes}\mathring{Y}'H\Gamma') = \Gamma AV\otimes\Sigma H\Gamma'$$

$$E(\mathring{Y}A\Gamma'\ddot{\otimes}\Gamma'H\mathring{Y}) = \Sigma H\Gamma'\otimes\Gamma AV$$

$$E(\mathring{Y}A\Gamma'\ddot{\otimes}\mathring{Y}'H\Gamma') = \Sigma H\Gamma'\hat{\otimes}\Gamma AV$$

$$-\mathrm{tr}(AV)\Sigma\ddot{\otimes}E(\mathring{Y}'H\mathring{Y}) = -\mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(H\Sigma)\Sigma\ddot{\otimes}V$$

$$\mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(H\Sigma)\Sigma\ddot{\otimes}V = \mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(H\Sigma)\ \Sigma\ddot{\otimes}V$$

Así tenemos que :

$$\underline{\mathrm{cov}(KYAY'K', B'Y'HYB) = 2K\Sigma H\Sigma K'\ddot{\otimes}B'VAVB +}$$

$$\underline{K\Gamma AVB\hat{\otimes}K\Sigma H\Gamma'B + K\Gamma AVB\otimes K\Sigma H\Gamma'B + K\Sigma H\Gamma'B\otimes K\Gamma AVB + K\Sigma H\Gamma'B\hat{\otimes}K\Gamma AVB}$$

<u>Conclusión</u> Hemos obtenido algunos resultados útiles para el cálculo de covarianzas de matrices aleatorias. La herramienta desarrollada elimina el cálculo tedioso y simplifica en gran manera el cómputo de estos desarrollos. Es muy importante en el artículo el desarrollo de varios tipos de productos de Kronecker así como los diferentes resultados al efectuar

los productos de los distintos tipos de matrices generados por estos. Es fundamental la forma de escribir la covarianza de una matriz aleatoria.

BIBLIOGRAFIA

1) R.J. Muirhead (1982). Aspects of multivariate statistical analysis. Wiley. N.Y.

2) J. Poltronieri. Contribución al estudio de formas cuadráticas en estadística multivariada (Por aparecer).