UNICIENCIA 4 (1-2)
pp. 69-75
1987

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS FORMAS CUADRATICAS Y LAS FORMAS LINEALES

Jorge Poltronieri
Escuela de Matemáticas
Universida de Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo se da explicitamente la forma de la varianza de las formas lineales y cuadráticas. Fue necesario definir el producto asimétrico de Kronecker de dos matrices con el fin de obtener de una forma sencilla los resultados requeridos. También se resuelve el caso en que la matriz es singular.

ABSTRACT

In this work we define the aymetric product of Kronecker of two matrices in order to obtain the covariance of linear and quadratic forms. We also consider the singular case.

En el estudio de las formas cuadráticas y las formas lineales se han tratado las relaciones entre la distribución Wishart y la distribución χ^2, así como las relaciones de independencia, pero hemos dejado de lado el estudio de las varianzas y covarianzas de estas formas.

El propósito aquí es encontrar estas relaciones. Como siempre se considera una sucesión $Y_1,\ldots,Y_n$ de variables aleatorias independientes tales que:

$$Y_\alpha \sim N_p(\mu_\alpha, \Sigma) \qquad \alpha=1,\ldots,n$$

Se considera $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ la matriz aleatoria de las observaciones i.e.

$$Y \sim N_{np}(\Gamma, I \otimes \Sigma)$$

donde $\Gamma=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ pues $E(Y)=\Gamma$ y $Var(Y)=I\otimes\Sigma=(cov(Y_\alpha,Y_\beta))$

<u>Proposición 1</u>: Sea $Y \sim N(\Gamma, I\otimes\Sigma)$ y sean A_{nxr}, B_{nxq} matrices. Si consideramos $Z=YB$ y $Q=YA$ entonces $cov(Z,Q)=B'A\otimes\Sigma$.

<u>Prueba</u>: Como $cov(Z,Q) = (cov(Z_\alpha,Q_\beta))$ donde $\alpha=1,\ldots,r$ y $\beta=1,\ldots,q$ entonces:

$$cov(Z_\alpha,Q_\beta) = cov(\sum_\gamma b'_{\alpha\gamma}Y_\gamma \sum_\delta a'_{\beta\delta}Y_\delta) = (\sum_{\gamma\delta} b'_{\alpha\gamma}a'_{\beta\delta}\delta_{\gamma\delta})\Sigma = (B'A)_{\alpha\beta}\Sigma$$

donde $b'_{\alpha\gamma}$ y $a'_{\beta\delta}$ denotan los elementos de la matriz B' y la matriz A' respectivamente.

Tomando en cuenta lo anterior tenemos:

$$cov(Z,Q) = B'A\otimes\Sigma \qquad cov(Q,Z) = A'B\otimes\Sigma$$

y si definimos $Y' = (Y^1,\ldots,Y^p)$ entonces $Var(Y') = \Sigma\otimes I$.

Es importante hacer notar que la covarianza entre Z y Q significa en realidad que las columnas de Z y de Q son puestas en columna, es decir:

$$cov(Z,Q) = cov(\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_r \end{bmatrix}) = (cov(Z_\alpha,Q_\beta)).$$

De esta manera se verifica facilmente que $cov(Z',Q') = \Sigma\otimes B'A$.

<u>Definición 1</u>: Se define el producto asimétrico de Kronecker de las matrices A_{nxr} y B_{pxq} por: (la entrada ijkl es la entrada kl del bloque ij)

$$(A\hat{\otimes}B)_{ijkl} = a_{il}b_{kj} = (A\otimes B)_{ilkj}$$

<u>Proposición 2</u>: Sea $Y \sim N(\Gamma, I\otimes\Sigma)$ y sean las matrices A_{nxn} simétrica y B_{qxn} entonces:

$$cov(YAY',YB') = \Gamma AB'\otimes\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Gamma AB'.$$

<u>Prueba:</u> Sabemos que la forma cuadrática centrada YAY' se escribe:

$$YAY'-\Gamma A\Gamma'-\Sigma tr(A) = (Y-\Gamma)A(Y-\Gamma)'+\Gamma A(Y-\Gamma)'+(Y-\Gamma)A\Gamma'-\Sigma tr(A) =$$

$$\sum_{\alpha\beta}\{a_{\alpha\beta}\overset{\circ}{Y}_{\alpha}\overset{\circ}{Y}'_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\overset{\circ}{Y}'_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\overset{\circ}{Y}_{\alpha}\nu'_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\Sigma\}$$

donde $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)=\Gamma A$ y $\overset{\circ}{Y}_{\alpha}=Y_{\alpha}-\mu_{\alpha}$. Para facilitar la escritura se denotará Y_{α} por $\overset{\circ}{Y}_{\alpha}$ y una coordenada $y_{i\alpha}$ por $\overset{\circ}{y}_{i\alpha}$.

Se define $\Sigma=(\sigma^1,\dots,\sigma^p)$ con $\sigma^{i'}=(\sigma_{i1},\dots,\sigma_{ip})$ y $\sigma=\begin{bmatrix}\sigma^1\\ \vdots\\ \sigma^p\end{bmatrix}$ por lo que la forma cuadrática puesta en columna nos da:

$$\sum_{\alpha\beta}\{a_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}y_{1\beta}Y_{\alpha}\\ \vdots\\ y_{p\beta}Y_{\alpha}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}y_{1\beta}\nu_{\alpha}\\ \vdots\\ y_{p\beta}\nu_{\alpha}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\nu_{1\beta}Y_{\alpha}\\ \vdots\\ \nu_{p\beta}Y_{\alpha}\end{bmatrix}-a_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}\sigma\}$$

La forma lineal YB' centrada tiene la forma:

$$(Y-\Gamma)B' = \sum_{\gamma}(b_{1\gamma}Y_{\gamma},\dots,b_{q\gamma}Y_{\gamma})$$

y puesta en línea es: $\sum_{\gamma}(b_{1\gamma}Y'_{\gamma},\dots,b_{q\gamma}Y'_{\gamma})$

Así obtenemos que la covarianza:

$$cov(YAY',YB') = \sum_{\alpha\beta\gamma}\{E\{\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}y_{1\beta}b_{1\gamma}\nu_{\alpha}Y'_{\gamma} & \cdots & y_{1\beta}b_{q\gamma}\nu_{\alpha}Y'_{\gamma}\\ \vdots & & \vdots\\ y_{p\beta}b_{1\gamma}\nu_{\alpha}Y'_{\gamma} & \cdots & y_{p\beta}b_{q\gamma}\nu_{\alpha}Y'_{\gamma}\end{bmatrix}$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\nu_{1\beta}b_{1\gamma}Y_{\alpha}Y'_{\gamma} & \cdots & \nu_{1\beta}b_{q\gamma}Y_{\alpha}Y'_{\gamma}\\ \vdots & & \vdots\\ \nu_{p\beta}b_{1\gamma}Y_{\alpha}Y'_{\gamma} & \cdots & \nu_{p\beta}b_{q\gamma}Y_{\alpha}Y'_{\gamma}\end{bmatrix}\}\}$$

pues los términos de orden 1 y de orden 3 se anulan para una ley normal centrada. La entrada ijkl es la entrada kl del bloque ij i.e.

$$(\mathrm{cov}(YAY',YB'))_{ijkl} = \sum_{\alpha\beta\gamma} E(\delta_{\alpha\beta} y_{i\beta} b_{j\gamma} \nu_{k\alpha} y_{l\gamma} + \delta_{\alpha\beta} \nu_{i\beta} b_{j\gamma} y_{k\alpha} y_{l\gamma})$$

$$= \sum_{\alpha} \nu_{k\alpha} b_{j\alpha} \sigma_{il} + \sum_{\alpha} \nu_{i\alpha} b_{j\alpha} \sigma_{kl} = (BA\Gamma')_{jk}\sigma_{il} + (BA\Gamma')_{ji}\sigma_{kl} =$$

$$= (\Gamma AB')_{ij}\sigma_{kl} + (\Gamma AB')_{kj}\sigma_{il}$$

por lo que: $$\mathrm{cov}(YAY',YB') = \Gamma AB' \otimes \Sigma + \Sigma \hat{\otimes} \Gamma AB'$$

Es importante notar que:
$$\mathrm{cov}(YB',YAY') = BA\Gamma' \otimes \Sigma + BA\Gamma' \hat{\otimes} \Sigma.$$

En el caso: $Y_\alpha \sim N(\mu_\alpha, 1)$ donde $\mu' = (\mu_1,\ldots,\mu_n) = \Gamma$ entonces:

$$\mathrm{cov}(YB',YAY') = 2BA\mu.$$

<u>Proposición 3</u>: Sea $Y \sim N(\Gamma, I\otimes\Sigma)$ y sean las matrices A_{nxn} y B_{nxn} simétricas; entonces tenemos:

$$\mathrm{cov}(YAY',YBY') = \mathrm{tr}(AB)(\Sigma\otimes\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Sigma) + \Sigma\otimes\Gamma AB\Gamma' + \Sigma\hat{\otimes}\Gamma AB\Gamma' + \Gamma AB\Gamma'\otimes\Sigma$$
$$+ \Gamma AB\Gamma'\hat{\otimes}\Sigma.$$

<u>Prueba</u>: Se conserva la notación T por $\overset{\circ}{T}$ variable centrada, y

$$\Sigma = (\sigma^1,\ldots,\sigma^p) \quad \text{con } \sigma^{i'} = (\sigma_{i1},\ldots,\sigma_{ip}) \quad \text{y } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^p \end{bmatrix}$$

Asi si $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)=\Gamma A$ y $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\Gamma B$ tenemos entonces:

$$\mathrm{cov}(YAY',YBY') = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} E\{a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} y_{1\beta}y_{1\delta}Y_\alpha Y'_\gamma & \cdots & y_{1\beta}y_{p\delta}Y_\alpha Y'_\gamma \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p\beta}y_{1\delta}Y_\alpha Y'_\gamma & \cdots & y_{p\beta}y_{p\delta}Y_\alpha Y'_\gamma \end{bmatrix}$$

$$+ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} y_{1\beta}y_{1\delta}\nu_\alpha\lambda'_\gamma & \cdots & y_{1\beta}y_{p\delta}\nu_\alpha\lambda'_\gamma \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p\beta}y_{1\delta}\nu_\alpha\lambda'_\gamma & \cdots & y_{p\beta}y_{p\delta}\nu_\alpha\lambda'_\gamma \end{bmatrix} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} \nu_{1\beta}y_{1\delta}Y_\alpha\lambda'_\gamma & \cdots & \nu_{1\beta}y_{p\delta}Y_\alpha\lambda'_\gamma \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_{p\beta}y_{1\delta}Y_\alpha\lambda'_\gamma & \cdots & \nu_{p\beta}y_{p\delta}Y_\alpha\lambda'_\gamma \end{bmatrix}$$

$$+ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} y_{1\beta}\lambda_{1\delta}\nu_\alpha Y'_\gamma & \cdots & y_{1\beta}\lambda_{p\delta}\nu_\alpha Y'_\gamma \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p\beta}\lambda_{1\delta}\nu_\alpha Y'_\gamma & \cdots & y_{p\beta}\lambda_{p\delta}\nu_\alpha Y'_\gamma \end{bmatrix} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} \nu_{1\beta}\lambda_{1\delta}Y_\alpha Y'_\gamma & \cdots & \nu_{1\beta}\lambda_{p\delta}Y_\alpha Y'_\gamma \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_{p\beta}\lambda_{1\delta}Y_\alpha Y'_\gamma & \cdots & \nu_{p\beta}\lambda_{p\delta}Y_\alpha Y'_\gamma \end{bmatrix}$$

$$- \delta_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} a_{\alpha\beta} \sigma (y_{1\delta} Y'_{\gamma}, \ldots, y_{p\delta} Y'_{\gamma}) - a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} \begin{bmatrix} y_{1\beta} Y_{\alpha} \\ \vdots \\ y_{p\beta} Y_{\alpha} \end{bmatrix} \sigma' + a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \sigma\sigma' \} .$$

pues los términos de orden 1 y 3 son nulos para las leyes normales centradas. El término ijkl es:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \{ a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} (\delta_{\gamma\delta} \sigma_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{kl} + \delta_{\alpha\beta} \sigma_{ik} \delta_{\gamma\delta} \sigma_{lj} + \delta_{\beta\gamma} \sigma_{il} \delta_{\alpha\delta} \sigma_{kj})$$

$$+ \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\beta\gamma} \sigma_{ij} \nu_{k\alpha} \lambda_{l\gamma} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{jk} \nu_{i\beta} \lambda_{l\gamma} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\beta\gamma} \sigma_{il} \nu_{k\delta} \lambda_{j\alpha}$$

$$+ \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{kl} \nu_{i\beta} \lambda_{j\delta} - 2 a_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} \sigma_{ik} \sigma_{jl} + a_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \delta_{\gamma\delta} \sigma_{ik} \sigma_{jl} \}$$

$$= tr(AB) \sigma_{ij} \sigma_{kl} + tr(A) tr(B) \sigma_{ik} \sigma_{jl} + tr(AB) \sigma_{il} \sigma_{jk} + \sigma_{ij} (\Gamma AB \Gamma')_{kl}$$

$$+ \sigma_{jk} (\Gamma AB \Gamma')_{il} + \sigma_{il} (\Gamma AB \Gamma')_{kj} + \sigma_{kl} (\Gamma AB \Gamma')_{ij} - tr(A) tr(B) \sigma_{ik} \sigma_{jl}$$

y por lo tanto se obtiene:

$$cov(YAY', YBY') = tr(AB)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \hat{\otimes} \Sigma) + \Sigma \otimes \Gamma AB \Gamma' + \Sigma \hat{\otimes} \Gamma AB \Gamma' + \Gamma AB \Gamma' \otimes \Sigma +$$

$$\Gamma AB \Gamma' \hat{\otimes} \Sigma .$$

<u>Corolario</u>: - $Var(YAY') = tr(A^2)(\Sigma \widehat{\otimes} \Sigma) + \Sigma \widehat{\otimes} \Gamma A^2 \Gamma' + \Gamma A^2 \Gamma' \widehat{\otimes} \Sigma$

donde $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B + A \hat{\otimes} B$

- Si $Y_{\alpha} \sim N(\mu_{\alpha}, 1)$ donde $\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_n) = \Gamma$ entonces

$cov(YAY', YBY') = 2tr(AB) + 4\mu' AB \mu .$

<u>Estudio del caso $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$</u>

Sea $r = rangV \leqslant n$, entonces existe $X \sim N(0, I_r \otimes \Sigma)$ tal que

$$Y = \Gamma + XL \text{ con } V = LL' \quad L_{rxn} \text{ de rango completo.}$$

- Sea A_{nxr} y B_{nxq} matrices y $Z = YB$, $Q = YA$ entonces:

$$cov(Z, Q) = cov(\Gamma B + XLB, \Gamma A + XLA) = cov(XLB, XLA) = B'VA \otimes \Sigma .$$

- Sean las matrices simétricas A_{nxn}, B_{nxn} entonces:

$$\mathrm{cov}(YAY',YBY') = \mathrm{cov}(\Gamma AL'X',\Gamma BL'X') + \mathrm{cov}(\Gamma AL'X',XLB\Gamma') +$$

$$\mathrm{cov}(XLA\Gamma',\Gamma BL'X') + \mathrm{cov}(XLA\Gamma',XLB\Gamma') + \mathrm{cov}(XLAL'X',XLBL'X')$$

$$= \Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma' + \Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Gamma AVB\Gamma' + \Gamma AVB\Gamma'\hat{\otimes}\Sigma + \mathrm{tr}(AVBV)(\Sigma\otimes\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Sigma)$$

- Sean A_{nxn} matriz simétrica y B_{rxn} entonces:

$$\mathrm{cov}(YAY',YB') = \mathrm{cov}(XLA\Gamma',XLB') + \mathrm{cov}(\Gamma AL'X',XLB')$$

$$= \Gamma AVB'\otimes\Sigma + \Sigma\hat{\otimes}\Gamma AVB'$$

- Observemos que:

$$\mathrm{cov}(YB',YAY') = BVA\Gamma'\otimes\Sigma + BVA\Gamma'\hat{\otimes}\Sigma$$

$$\mathrm{cov}(AY',YB) = \Sigma\hat{\otimes}AVB$$

$$\mathrm{cov}(YB,AY') = (AVB)'\hat{\otimes}\Sigma = B'VA'\hat{\otimes}\Sigma$$

$$\mathrm{cov}(YC,YD) = C'VD\otimes\Sigma$$

$$\mathrm{cov}(EY',FY') = \Sigma\otimes EVF'$$

donde las matrices A, B, C, D, E, F son de orden conveniente.

Es importante hacer notar que: $\mathrm{cov}(Y',Y) = \Sigma\hat{\otimes}V$

$$\mathrm{cov}(Y,Y') = V\hat{\otimes}\Sigma$$

En forma general tenemos los siguientes resultados:

$$\mathrm{cov}(KYAY'K',BY'H) = K'\Sigma H'\otimes AVB + AVB\hat{\otimes}K'\Sigma H'$$

$$\mathrm{cov}(KYA,HYB) = A'VB\otimes K\Sigma H'$$

$$E(YAY') = \Gamma A\Gamma' + E(XLAL'X') = \Gamma A\Gamma' + \Sigma\mathrm{tr}(AV)$$

BIBLIOGRAFIA

1. J. Poltronieri. "Formas cuadráticas y formas lineales en estadística multivariada" (Por aparecer).

2. S.R. Searle. "Linear models" J. Wiley N.Y. 1971.