UNICIENCIA 20
pp. 251-257
2003

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO INSTRUMENTO PEDAGÓGICO

Orietta Protti

Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas y
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
oprotti@cariari.ucr.ac.cr

RESUMEN

En este artículo se consideran algunos de los principales recursos que se pueden utilizar para hacer un uso, pedagógicamente adecuado, de la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina, al nivel de la educación secundaria y universitaria. Además, a modo de ejemplo de una de las ideas planteadas, hacemos un recorrido del desarrollo histórico del álgebra, destacando aquellos aspectos que consideramos útiles para lograr que el estudiante se familiarice y llegue a asimilar los elementos de esta área a nivel de la enseñanza secundaria.

ABSTRACT

In this paper we take into consideration some of the principal means useable to take advantage, from the pedagogical point of view, of the history of mathematics for its teaching and understanding at the high school and undergraduate level. As an example and as an application of such ideas, we briefly review the historical development of algebra, highlighting those aspects that can be useful to the students to become familiar with the main ideas of high school algebra.

PALABRAS CLAVE

Educación Matemática, Historia de las Matemáticas, Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Desde hace muchos años, diversos investigadores han promovido el uso de la historia como un instrumento pedagógico más, con la idea de utilizar aquellos aspectos del desarrollo histórico de una ciencia, en nuestro caso las matemáticas, que nos permitan hacer más simple y efectiva nuestra tarea de enseñar. Esta idea está fundamentada en la convicción de que en la enseñanza de las ciencias, en general, no es posible dejar de establecer vínculos con la filosofía de la disciplina que se pretende transmitir, ya que los paradigmas o visiones filosóficas aceptados juegan un papel activo en el decurso científico y educativo. Por otra parte, la visión filosófica de una ciencia que se adopte para su enseñanza está íntimamente ligada con su desarrollo histórico. La relación entre la ideología, la historia y la práctica educativa misma se convierte en palanca teórica importante para la comprensión de los problemas de la enseñanza de la ciencia en sí. A este respecto, RUIZ (1997) señala:

"La concepción del uso de la historia en la educación varia en función de la filosofía de las matemáticas que se posea. Y este constituye uno de los ejemplos más importantes de la relación entre la ideología o la filosofía y la práctica educativa matemática."

En el caso de las matemáticas, es relevante mencionar también que el uso apropiado de su historia en el proceso de enseñanza permite poner en perspectiva el papel integral de las matemáticas en el desarrollo social de la humanidad.

Se puede, entonces, utilizar la historia del desarrollo del pensamiento matemático en el proceso educativo, de diversas formas y con distintos objetivos.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Sin intención de ser exhaustivos, podemos mencionar los siguientes recursos pedagógicos que permiten el uso adecuado de la historia de las matemáticas en su enseñanza:

Utilizar algún pasaje de la historia a modo de anécdota, como recurso de motivación. En este caso, se suele hacer referencia a hechos históricos aislados, ya sea del desarrollo de las matemáticas mismas o de la vida de algún matemático cuya contribución al avance en la comprensión del tema en cuestión haya tenido alguna valía.

Introducir un concepto a través de la presentación de algún problema y el análisis de cómo se resolvió históricamente. Este recurso permite poner en evidencia el contexto intelectual en que se desarrolla el problema planteado. Además, muestra la estructura interna de los mecanismos conceptuales que permiten resolver un problema, no mediante el aprendizaje mecánico de los algoritmos que se utilicen sino basados en la comprensión del problema y de los conceptos involucrados en la solución del mismo.

Recorrer el desarrollo histórico de un área de las matemáticas, tratando de reproducir el proceso de aprendizaje de esa área con base en el recorrido completo. La historia de las matemáticas es parte esencial de la historia del razonamiento humano: si vamos a los orígenes de un concepto podremos comprender el modo como se introdujo en el contexto correspondiente, si analizamos el camino recorrido, a lo largo del desarrollo de un tema, podremos encontrar los métodos que fueron utilizados con más éxito, para comprender los distintos elementos que lo fueron tejiendo hasta llegar a ser dominado tanto en su comprensión como en el uso apropiado de los algoritmos involucrados.

"Aprender de Los Maestros". Sobre todo en niveles de aprendizaje más avanzados, se puede recurrir a lecturas de escritos originales de los grandes pensadores que desarrollaron las ideas del pensamiento matemático, lo cual permite al estudiante dilucidar el proceso del desarrollo lógico de una idea. MAN-KEUNG SIU (1996) quien dicta un curso sobre "Desarrollo de las ideas matemáticas" en la Universidad de Hong Kong menciona: "... con respecto al pensamiento matemático trato de permitir que los estudiantes experimenten cómo es que los matemáticos realizan sus trabajos, ellos verán así que el enfoque lógico y axiomático ejemplificado en los Elementos de Euclides no es el único camino." (Traducción de la autora).

Al hacer uso de la historia en la educación matemática se suele recurrir con más frecuencia al primer tipo de recurso mencionado, utilizando referencias históricas con fines ilustrativos. Este recurso metodológico permite captar la atención del estudiante, haciendo el aprendizaje más placentero, o bien mostrando el lado humano de las matemáticas, muchas veces escondido en el mar de contenidos de un programa de estudios. EVES (1969), resume estas ventajas diciendo:

"Estas historias y anécdotas han probado ser muy útiles en la clase – como pequeños átomos que aumentan el interés, para añadir sazón y un toque de entretenimiento, para introducir el elemento humano, para inspirar al estudiante, para inculcar respeto y admiración por los grandes creadores, para darle un tirón hacia atrás al interés decaído, para forjar relaciones con la historia cultural, o para subrayar algún concepto o idea." (Traducción de la autora).

Retomando la última parte de la cita, vemos que este tipo de recurso nos permite resaltar alguna idea dentro del contexto del tema a desarrollar, sin embargo, si se pretende integrar el uso de la historia de las matemáticas de manera óptima, se debe sustentar una vinculación coherente y eficaz con el proceso educativo. Para lograr este propósito, es necesario aprovechar otros recursos como los mencionados, los cuales permiten estructurar el proceso de enseñanza con base en el devenir histórico completo. Para utilizar la historia de manera apropiada en el proceso didáctico, es necesario conocerla, sin embargo, cualquiera que sea el recurso que se vaya a utilizar, no se trata de dar un curso de historia de las matemáticas, sino de saber escoger aquellos aspectos del desarrollo histórico de las mismas que permitan facilitar el aprendizaje, pues no es un secreto que, muchas veces, la manera como la humanidad aprendió es más dolorosa y tortuosa que la manera como el tiempo nos ha enseñado a abordar el conocimiento.

De todos es sabido que uno de los caminos más difíciles de recorrer para el estudiante es el que lleva de la aritmética al álgebra. A la humanidad le llevó siglos recorrer este camino, con muchos errores, tropiezos y verdades a medias a lo largo del recorrido. Con avances y retrocesos en el desarrollo del álgebra el hombre fue logrando comprender y describir verdades generales, que no se formulan para un objeto en particular. Es decir, logró dar el paso del pensamiento concreto a la abstracción. Tomando esto en cuenta, no es difícil entender la dificultad que suelen tener muchos estudiantes cuando dan los primeros pasos en el terreno del álgebra, sobre todo porque muchas veces se aborda su enseñanza como una serie de reglas que relacionan letras y números sin ningún fundamento y que el alumno debe memorizar y aprender a aplicar a ciegas.

Otro aspecto a tomar en cuenta es el desarrollo intelectual esperable en nuestros interlocutores, los estudiantes. Según Jean Piaget (epistemólogo suizo, 1896-1980) el conocimiento progresa porque hay un desarrollo mental durante el proceso de aprendizaje. Ahora bien, Piaget indicó que la adolescencia es el comienzo del período de razonamiento de las operaciones formales, pero otros estudios muestran que, la capacidad del adolescente para pensar formalmente depende del aprendizaje acumulado y de la educación que ha tenido. De hecho, las últimas investigaciones de la psicología genética plantean que el alumno que comienza la enseñanza secundaria (alrededor de los trece años) se encuentra aún en el apogeo del pensamiento operatorio concreto y en lenta transición hacia el pensamiento formal. El niño con pensamiento concreto construye sobre datos conocidos y razona sobre lo que está presente. La persona con pensamiento formal puede generar la búsqueda de propiedades generales, puede ir más allá de lo tangible, puede dar justificación lógica a sus juicios.

Es un hecho que el aprendizaje del álgebra requiere del pensamiento formal o proposicional. Si queremos un aprendizaje exitoso del álgebra por parte del alumno, debemos recorrer el camino despacio, tratando de respetar esa transición del desarrollo intelectual del estudiante.

Con este objetivo en mente, las investigadoras argentinas Leonor Norma Coso y Rosa Ana La Menza (1999), proponen observar las distintas etapas del desarrollo histórico del álgebra y tratar de reproducir este proceso con nuestros estudiantes; es decir, recorrer el camino paso a paso con el fin de propiciar el mejor entendimiento de la materia, conforme el estudiante va logrando el paso del pensamiento concreto a la abstracción.

En este trabajo, sustentamos y desarrollamos esta propuesta, como un ejemplo significativo del tercer recurso mencionado sobre los usos de la historia en la enseñanza de las matemáticas, cual es, "recorrer el desarrollo histórico de un área de las matemáticas, tratando de reproducir el proceso de aprendizaje de esa área con base en el recorrido completo".

Con respecto al uso de los otros recursos mencionados existe amplia literatura, en particular, en los libros de texto y guías didácticas de las autoras Orietta Protti y Teodora Tsijli (PROTTI y TSI-JLI 1997a, 1997b y TSIJLI 1997a, 1997b) se pueden encontrar diversos ejemplos del uso de los dos primeros, sobre todo a nivel de la enseñanza media.

DANTZIG (1947) señala tres etapas en el desarrollo histórico del álgebra: la retórica, la sincopada y la simbólica.

- **Etapa retórica**: En esta primera etapa no se utilizan los símbolos, los problemas se describen en su totalidad a base de palabras. Recordemos la bella forma en que aparecen algunos de los problemas planteados en el libro *"Lilavati"* del gran matemático hindú del siglo doce, Báskara:

"La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba, la tercera parte en una flor de silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números vuela sobre una flor de krutja y una abeja vuela indecisa de una flor de pandanus a un jazmín. Dime, hermosa niña, ¿cuál es el número de abejas?"

La historia de Lilavati es una bella anécdota para ser contada, aparece en el libro *"El hombre que calculaba"* del escritor hindú Malba Taham, aunque se puede encontrar también en BOYER (1985), e incluso en PROTTI y TSIJLI (1997a).

Se puede decir que en esta etapa se utiliza aún el pensamiento concreto pues el lenguaje que se usa asigna cada palabra al objeto al que se refiere. El lenguaje abstracto del álgebra, en el que se manejan objetos intencionalmente despojados de su significado en el mundo físico, está aún lejos de quien está interesado en el objeto mismo. Tomando en cuenta la observación que hicimos sobre el desarrollo intelectual del estudiante, podríamos abordar primero la solución de algunos problemas planteados en estos términos, antes de introducir el lenguaje y simbolismo abstractos propios del álgebra.

Recordemos que lo simple suele ser mejor punto de partida que lo difícil, podemos iniciar con problemas tan simples como:

- En 1994, German Silva de México ganó la maratón de Nueva York con un tiempo de dos horas, once minutos y veintiún segundos. Ese mismo año, Cosmas N'Deti de Kenia ganó la maratón de Boston con un tiempo cuatro minutos y seis segundos más rápido que el de Silva. ¿Cuánto tardó N'Deti en correr la maratón de Boston?

- Un productor de naranjas utiliza, para el transporte del producto, cajas de madera que pesan dos kilogramos cada una. Cada naranja pesa doscientos gramos y el peso total de una caja llena de naranjas es de diez kilogramos, ¿cuántas naranjas se empacan en cada caja?

- Un padre pagó cinco mil seiscientos colones por las entradas al cine para él y sus tres hijos escolares. La entrada de adultos cuesta ochocientos colones más que la de niños, ¿cuánto cuesta la entrada para adultos?

En torno a la escogencia de problemas apropiados, la manera de abordar su solución, el papel del educador y del estudiante en la solución de los mismos y otras consideraciones relacionadas con el tema, mucho se ha dicho en diversas fuentes y no es precisamente lo que nos ocupa. Entre la literatura existente al respecto nos limitamos a mencionar un extracto del libro: *"La matemática: Del conflicto al diálogo"* (COSO y LA MENZA 1999):

"¿Qué es un problema "en serio"? Un problema es:

- ✎ un reto adecuado a las capacidades del sujeto que debe resolverlo;
- ✎ interesante en sí mismo;
- ✎ algo que permite utilizar conocimientos anteriores, no quedar desarmado ante él, pero ofrecer una resistencia suficiente como para que el alumno evolucione a partir de sus conocimientos anteriores, los cuales cuestione y elabore otros nuevos."

En este sentido, las palabras de George Bernard Shaw (dramaturgo irlandés, 1856-1950, Premio Nobel en 1925) hablan por sí solas:

"En última instancia, la solución de los problemas no consiste en hacer, ni en dejar de hacer, sino en COMPRENDER; porque donde hay verdadera comprensión, no hay problemas."

➢ **Etapa sincopada**: Durante este período algunas palabras de uso frecuente se empiezan a abreviar hasta llegar a olvidar su origen, lo cual va produciendo símbolos que no tienen conexión evidente con lo que representan. Un buen ejemplo de esto es el uso del signo menos (-), que fue expresado durante mucho tiempo, sobre todo en Europa, por la palabra latina completa *minus*, después pasó a usarse la letra m con una raya encima, hasta que desapareció la letra y quedó en uso únicamente la raya como el signo de la resta.

Se suele decir que los hindúes fueron los primeros en sincopar la escritura, aunque hay ejemplos previos de esta práctica desde los griegos. En el álgebra de Brahmagupta (quien vivió en la India Central alrededor del año 628), por ejemplo, la suma se indica por yuxtaposición de los términos, en la resta se coloca un punto sobre el sustraendo y en la división, el divisor se coloca debajo del dividendo. Para las multiplicaciones y el cálculo de raíces, así como para las incógnitas, se usaban abreviaciones, o a veces la primera letra de alguna palabra apropiada. Es importante observar que esta es una etapa de transición, pues esto no quiere decir que estos símbolos se usasen como lenguaje lógico, con una sintaxis rigurosa. De hecho, el lenguaje retórico siguió dominando la escritura por mucho tiempo, en la misma India podemos observar este hecho en el lenguaje de Báskara varios siglos después.

Una figura cuyo nombre trascendió en la historia fue Mohammed ibn-Musa Al-Khuwarizmi, un matemático y astrónomo de Baghdad quien murió cerca del año 850. En su libro *"De numero indorum"* hizo una descripción precisa del sistema de numeración hindú; se cree que de ahí viene la confusión esparcida de que el sistema decimal que utilizamos sea de origen árabe y no hindú. Pero su libro más importante, sin lugar a dudas, es el Hisab Al-jabar Walmukabala, nombre que dio origen al término álgebra. Mucho se puede decir sobre el Al-jabar, sin embargo, en la orientación de nuestra presentación, es importante rescatar que, si bien es cierto es más elemental en muchos aspectos que el trabajo de Diofantes de Alejandría (325-409), e incluso fue escrito en forma retórica (a pesar de ser posterior a Brahmagupta), está mucho más cerca del álgebra elemental moderna puesto que no se dedica a resolver problemas particulares sino que hace la transición hacia el pensamiento abstracto y, en particular, hace una exposición clara y sistemática de las soluciones de ecuaciones, especialmente de segundo grado. De aquí, entre otras razones, la conocida discusión sobre quién es *"el padre del álgebra"*, Diofantes o Al-Khuwarizmi, (BOYER 1985).

Volviendo a nuestra propuesta, de los problemas resueltos en forma retórica podemos hacer la transición hacia la abstracción. Por ejemplo, en vez de entrar de lleno en las definiciones de parte numérica, parte literal, monomios, monomios semejantes y suma de monomios, podemos empezar con algo tan sencillo como:

"En la biblioteca del colegio hay mil trescientos veinte libros y trescientas revistas. En la semana de la lectura, los estudiantes lograron reunir otros doscientos diez libros y cincuenta y tres revistas, ¿cuántos libros y cuántas revistas tendremos a disposición ahora?"

Solución retórica:

mil trescientos veinte libros más
doscientos diez libros son
mil quinientos treinta libros,

trescientas revistas más
cincuenta y tres revistas son
trescientas cincuenta y tres revistas.

Solución sincopada:

$$1320\,L + 210\,L = 1530\,L$$
$$300\,R + 53\,R = 353\,R$$

Podemos escribir a continuación una sola ecuación, la cual nos permite analizar lo realizado; libros se suman con libros, revistas con revistas:

$$1320L + 300R + 210L + 53R = 1530L + 353R$$

Respuesta: En la biblioteca tenemos ahora 1530 libros y 353 revistas para disfrutar. ¡Claramente no podríamos decir que tenemos 1883 libros!

Antes de pasar al lenguaje simbólico, tanto en la primera como en la segunda etapa, tiene cabida insistir en el manejo correcto de la operatoria algebraica (conmutatividad, asociatividad, distributividad, operaciones con enteros, racionales, raices, potencias) pues, ante todo, no olvidemos que estamos dando el paso de la aritmética al álgebra. Esto, por supuesto, se debe hacer a través de la solución de problemas y ejemplos concretos y no mediante una presentación axiomática de las propiedades en cuestión.

- **Etapa simbólica:** Conforme se da el paso hacia la abstracción aparece el lenguaje simbólico, donde las letras tienen un significado independiente de aquello que representan. Este lenguaje permite pasar de trabajar únicamente con expresiones particulares, a comprender, plantear y resolver expresiones generales. Podemos decir que el álgebra comienza su etapa simbólica a partir de los trabajos de François Viète (abogado francés, 1540-1603) quien empieza a diferenciar la aritmética del álgebra al distinguir entre lo que llama *"logística numerosa"* (cálculo con números) y *"logística speciosa"* (cálculo con letras). Así, introdujo el uso sistemático de las vocales para representar las incógnitas y las consonantes para las cantidades conocidas. La simbología actual, que utiliza las primeras letras del alfabeto para las constantes y las últimas para las variables, aparece en el siglo XVII con René Descartes y la Geometría Analítica (filósofo, físico y matemático francés, 1596-1650).

Una de las grandes ventajas del lenguaje simbólico es que nos libera de las ambigüedades del lenguaje cotidiano. Recordemos que la transmisión de conocimientos está basada en la comunicación efectiva de los mismos. Una vez tenemos dominio operativo sobre los símbolos, con verdadera comprensión de los conceptos que estos representan, podemos trabajar en base a un sistema lógico riguroso. Con relación al proceso educativo, es importante recordar el cambio mental significativo que se lleva a cabo al pasar del pensamiento concreto al pensamiento formal. Esta transformación en la manera de pensar no puede verse sino como un proceso lento y progresivo, el alumno no adquiere el dominio del lenguaje proposicional porque le hagamos memorizar una lista de símbolos y reglas para operar con ellos pues, aún cuando llegue a manejarlos hábilmente en forma mecánica, si no hay comprensión no hay avance en el desarrollo intelectual. Podemos reforzar esta idea con las palabras de Bertrand Russell (filósofo inglés, 1872-1947, Premio Nobel de Literatura en 1950):

"Incluso el niño más inteligente tropieza con grandes dificultades cuando empieza a estudiar álgebra. El empleo de letras es un misterio que no parece tener otra finalidad que la confusión. Es casi imposible, al principio, que el alumno no piense que toda letra figura en lugar de un número determinado que el profesor muy bien habría podido indicar.

El hecho es que con el álgebra se enseña por primera vez al espíritu a examinar verdades generales, verdades que no se formulan únicamente valederas para tal o cual cosa particular sino para cualquiera de todo un grupo de cosas.

En la facultad de comprender y describir esas verdades reside el dominio del intelecto sobre todo el mundo de cosas reales y posibles; y la aptitud para ocuparse de lo general en sí es uno de los dones que debería otorgar una educación matemática."

Usando un ejemplo sencillo, como el analizado anteriormente sobre los libros y revistas en la biblioteca del colegio, podemos dar el paso hacia el lenguaje simbólico abstracto.

Solución simbólica:

En la ecuación:

$$1320L + 300R + 210L + 53R = 1530L + 353R$$

las letras L y R pueden representar cualquier objeto o concepto, podemos entonces utilizar cualquier otra letra y escribir, por ejemplo,

$$1320\,a + 300\,b + 210\,a + 53\,b = 1530\,a + 353\,b,$$

o también,

$$1320\,x + 300\,y + 210\,x + 53\,y = 1530\,x + 353\,y.$$

En este momento tiene cabida la discusión sobre los conceptos de parte numérica, parte lite-ral, monomios, monomios semejantes, suma de monomios.

CONCLUSIÓN

Rescatando las ideas planteadas en este trabajo, podemos afirmar que, el uso adecuado de la historia de las matemáticas, como parte del proceso educativo de la disciplina, va más allá de la simple contextualización, pues, se puede utilizar el conocimiento histórico de modos diversos y con distintos objetivos. Esto permite aprovechar aquellos aspectos históricos que hagan más efectiva la enseñanza, así como, también, poner en perspectiva el papel protagónico que ha tenido el desarrollo del pensamiento matemático en el desarrollo social de la humanidad.

En esta línea de acción, hemos mencionado algunas opciones que pueden ser útiles en la tarea de enseñanza que nos ocupa, cuales son, el uso de anécdotas, el estudio del contexto histórico de la solución de un problema concreto, el desarrollo histórico completo de un tema o de un área de las matemáticas y, en etapas más avanzadas, el estudio directo de los trabajos originales de algún matemático.

Está claro que, para poder utilizar cualquiera de estos recursos con éxito, es necesario tener conocimiento del proceso histórico de lo que se enseña. Solo así, será posible escoger aquellos aspectos de la historia de las matemáticas que permitan facilitar el aprendizaje, manteniendo siempre un vínculo coherente con la filosofía y la práctica educativa. En este sentido, es importante que los programas de estudio de los estudiantes de matemática educativa incluyan una formación básica en historia de las matemáticas.

Finalmente, recordemos que el proceso de aprendizaje requiere de un desarrollo intelectual que se va dando paso a paso, conforme aprendemos, el intelecto se desarrolla; conforme nuestra manera de pensar evoluciona, somos capaces de aprender más y mejor. Tampoco debemos olvidar que el aprendizaje se da como un proceso integral, no sólo se aprende en el aula sino que gran parte de nuestros conocimientos son adquiridos, a través de nuestros sentidos, en cada una de nuestras vivencias. El trabajo del aula consiste en ampliar, ordenar, limpiar, separar, sistematizar, desarrollar esos conocimientos. El alumno es más receptivo y aprende mejor cuando comprende lo que se le enseña, cuando le encuentra sentido a lo que se le propone.

REFERENCIAS

Boyer, C. (1985). *A History of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Coso, L. N. y R. A. La Menza (1999). *La matemática: Del conflicto al diálogo*. Argentina: Grupo Editor Aique, Colección: Carrera Docente.

Dantzig, T. (1947). *Número. El lenguaje de la ciencia*. Buenos Aires: Librería del Colegio, Colección "Ciencia y Método".

Eves, H. W. (1969). *In Mathematical Circles: A Selection of Mathematical Stories and Anecdotes*. Boston: Weber & Schmidt.

Protti, O. y T. Tsijli. (1997a). *Matemáticas 8, Texto*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, Serie: Hacia el siglo XXI.

Protti, O. y T. Tsijli. (1997b). *Matemáticas 8, Guía Didáctica*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, Serie: Hacia el siglo XXI.

Ruiz, A. (1997). "Las posibilidades de la Historia en la Educación Matemática". Boletín Informativo, Comité Interamericano de Educación Matemática.

Siu, Man-Keung (1996). "The ABCD of using history of mathematics in the classroom". Electronic-mail. Department of Mathematics, University of Hong Kong.

Tsijli, T. (1997a). *Matemáticas 9, Texto*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, Serie: Hacia el siglo XXI.

Tsijli, T. (1997b). *Matemáticas 9, Guía Didáctica*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica, Serie: Hacia el siglo XXI.