UNICIENCIA 21
pp. 105-115
2004

TRANSFORMACIONES DE DATUM

Manuel Ramírez y Juan G. Serpas
Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional
mramire@una.ac.cr
jserpas@una.ac.cr

RESUMEN

Con el uso generalizado de las técnicas satelitales aplicadas en topografía y geodesia, se ha generado la necesidad de transformar entre marcos coordenados de referencia globales y locales. En este artículo se describen y comparan los métodos más aplicados para la transformación de coordenadas entre datums geodésicos, tales como: la transformación de siete parámetros, la regresión múltiple y la transformación de Molodensky. Se proveen las ecuaciones fundamentales de transformación y su implementación en lenguaje MatLab.

PALABRAS CLAVES: datum, transformación, Molodensky, Bursa-Wolf, bilinear.

ABSTRACT

With the generalized use of satellite techniques and their applications in land surveying and geodesy, a necessity to transform between global and local reference frames has been seen. In this article, a description and comparison of the most common methods for coordinate transformation between geodetic datums is given. Different approaches such as the seven parameter transformation (Bursa-Wolf method), multiple regression, and Molodensky's transformation are explained among others. Fundamental transformation equations as well as MatLab code for their implementations is provided.

KEYWORDS: datum, transformation, Molodensky, Bursa-Wolf, bilinear.

INTRODUCCIÓN

Con el advenimiento de los modernos sistemas satelitales, la tendencia es adoptar sistemas coordenados de referencia referidos a datums geodésicos globales. Un datum geodésico es un conjunto de parámetros y constantes que definen un sistema coordenado, incluyendo su origen, su orientación y su escala, de tal manera de hacerlo accesible para aplicaciones geodésicas (JEKELI 2002). Un sistema de referencia consiste en una serie de prescripciones y convenciones junto con un modelo requerido para definir en cualquier momento un sistema de ejes coordenados. Las tecnologías modernas satelitales (e.g. GPS) proporcionan coordenadas referidas a un sistema global (e.g. WGS84). En general, y tradicionalmente, cada país ha definido su propio datum de referencia local. Con el fin de referenciar las mediciones realizadas por medio de técnicas satelitales, necesitamos transformar nuestras mediciones para representarlas en nuestro sistema coordenado y datum local.

Varios modelos de transformación han sido desarrollados para resolver el problema descrito, aplicables tanto en el área de la geodesia como en los sistemas de información espacial. Una descripción de los métodos más conocidos será presentada a continuación.

ESTRATEGIAS DE TRANSFORMACIÓN DE DATUM

A continuación se describen algunos métodos o modelos matemáticos para realizar una transformación de datum, se detallan el fundamento matemático, así como las ventajas y desventajas de cada método.

1. Transformación de Bursa-Wolf

Este método de transformación de datum utiliza un modelo matemático de transformación de siete parámetros para hacer el paso de un datum a otro. Este método es usado para transformar las coordenadas geocéntricas (X, Y, Z) de un datum "A" a las coordenadas geocéntricas de un datum "B". En general, el datum "B" es un datum local y el datum "A" es un datum global. Se asume que la geometría interna (distribución) de los puntos idénticos en ambos datums es consistente, es decir, que entre los puntos idénticos sólo se consideran traslaciones, giros y un posible factor de escala (ver figura 1). Este método se basa, entonces, en una transformación por similaridad, donde los ángulos y las formas son mantenidos, pero el tamaño y la posición pueden variar de un sistema a otro.

La forma de transformar las coordenadas cartesianas, dadas en un sistema triaxial a otro, consiste en utilizar una transformación de siete parámetros, los cuales son: tres traslaciones (ΔX, ΔY, ΔZ), tres rotaciones (R_x, R_y, R_z) y un cambio de escala (s).

La relación entre los dos sistemas geodésicos de coordenadas está dada por el siguiente modelo (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993, p. 239):

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+s & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1+s & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}^A \qquad (1)$$

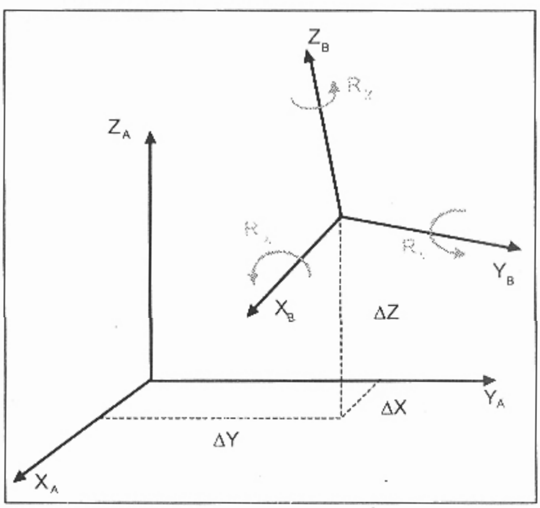

Figura 1. Transformación de siete parámetros entre dos sistemas.

En el modelo anterior se asume que los ángulos de rotación son muy pequeños, generalmente alrededor de 5 segundos de arco en redes geodésicas.

Los parámetros de transformación son determinados aplicando un ajuste por mínimos cuadrados basándose en al menos tres puntos idénticos –puntos en común entre ambos sistemas de coordenadas–, aunque entre más puntos idénticos sean utilizados más confiable será la determinación de los parámetros. Las ecuaciones de observación expresadas en forma matricial, basadas en los puntos idénticos, para la determinación de los parámetros de transformación son las siguientes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1^B - X_1^A \\ Y_1^B - Y_1^A \\ Z_1^B - Z_1^A \\ X_2^B - X_2^A \\ Y_2^B - Y_2^A \\ Z_2^B - Z_2^A \\ \vdots \end{bmatrix}}_{y_{nx1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_1^A & Y_1^A & X_1^A \\ 0 & 1 & 0 & Z_1^A & 0 & -X_1^A & Y_1^A \\ 0 & 0 & 1 & -Y_1^A & X_1^A & 0 & Z_1^A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_2^A & Y_2^A & X_2^A \\ 0 & 1 & 0 & Z_2^A & 0 & -X_2^A & X_2^A \\ 0 & 0 & 1 & -Y_2^A & X_2^A & 0 & Z_2^A \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix}}_{A_{nx7}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ s \end{bmatrix}}_{\xi_{7x1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{e_{nx1}} \qquad (2)$$

con el vector de observación $y \sim (A\xi, \sigma_o^2 I)$ y rango (A) = u=7, y n el número de observaciones.

La estimación del vector de las incógnitas $\hat{\xi}$ y su respectiva matriz de dispersión $\hat{D}\{\hat{\xi}\}$ está dada por las siguientes relaciones:

$$\hat{\xi} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y \qquad (3)$$

$$\hat{D}\{\hat{\xi}\} = \hat{\sigma}_o^2 \left(A^T A\right)^{-1} \qquad (4)$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\tilde{e}^T \tilde{e}}{n-u} \qquad (5)$$

$$\tilde{e} = y - A\hat{\xi} \tag{6}$$

Las cuales resultan de una minimización del cuadrado de los residuos ($e^T e \rightarrow min$).

Si los dos sistemas no son homogéneos, la solución no es confiable sin importar la cantidad de puntos idénticos usados. Aunque la exactitud de este método está limitada por los datos usados, en la práctica se ha visto que en general la exactitud está en el rango de 1 a 2 metros (ICSM 2000). Un problema asociado a este modelo de transformación es que si la red de puntos usada para determinar los parámetros cubre áreas pequeñas de la superficie terrestre, existirá entonces una alta correlación entre los giros y las traslaciones.

Ventajas:

- Con un mínimo de tres puntos idénticos, es posible determinar los parámetros de la transformación.
- Tiene pocos parámetros, lo que facilita su aplicación.

Desventajas:

- Se asume que las redes son consistentes internamente, es decir, homogéneas.
- El modelo es adecuado sólo cuando el factor de escala es igual en todas las direcciones.
- Para utilizar esta estrategia debemos pasar de primero φ, λ, h a X, Y, Z para cada datum; con el inconveniente que para redes locales puede ser que no se conozca la altura elipsoidal h.
- Alta correlación entre giros y traslaciones, en redes pequeñas.

En el anexo 1 se brinda el código de un programa basado en MatLab para determinar los siete parámetros de transformación.

2. Modelo Molodensky-Badekas

Este modelo es similar al de transformación de siete parámetros, pero elimina la alta correlación que existe entre los parámetros mediante la reducción de los puntos idénticos a su centro de gravedad. Conceptualmente, la única diferencia entre los modelos Molodensky-Badekas y Bursa-Wolf es el punto alrededor del cual las rotaciones y el factor de escala son aplicados. La ecuación de transformación está dada por:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}^A + \begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \\ \Delta Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+s & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1+s & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - \overline{X} \\ Y_i - \overline{Y} \\ Z_i - \overline{Z} \end{bmatrix}^A \tag{7}$$

donde:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i^A, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_i Y_i^A, \quad \overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_i Z_i^A$$

$\Delta X', \Delta Y', \Delta Z'$ = traslaciones en el modelo Molodensky-Badekas.

R_X, R_Y, R_Z, s = rotaciones alrededor de los ejes X, Y, Z, respectivamente, y s el factor de escala.

Los parámetros de factor de escala y rotaciones determinados con este modelo son los mismos que los determinados mediante el modelo de siete parámetros, pero las traslaciones son diferentes y sus precisiones son por lo general en un orden de magnitud más pequeños (PEARSE y CROOK 1997).

Ventajas:

- Con un mínimo de tres puntos idénticos, es posible determinar los parámetros de la transformación.
- Tiene pocos parámetros.
- Se elimina la alta correlación de los parámetros.

Desventajas:

- Se asume que las redes son consistentes internamente.
- El modelo es adecuado sólo cuando el factor de escala es igual en todas las direcciones.
- Para utilizar esta estrategia debemos pasar de primero φ, λ, h a X, Y, Z para cada datum; con el inconveniente que para redes locales puede ser que no se conozca la altura elipsoidal h.

3. Transformación de Molodensky

La transformación o fórmula de Molodensky permite transformar la latitud (φ), longitud (λ) y la altura elipsoídica (h) de un sistema a otro sin tener que pasar por las coordenadas rectangulares (X, Y, Z). Este método es ideal cuando el elipsoide de referencia local es paralelo al elipsoide global, es decir, cuando los sistemas de referencia son paralelos. Los parámetros que intervienen en este método son tres traslaciones (ΔX, ΔY, ΔZ), la diferencia de achatamientos (Δf) y la diferencia de los semiejes mayores de los elipsoides de referencia (Δa), ver figura 2.

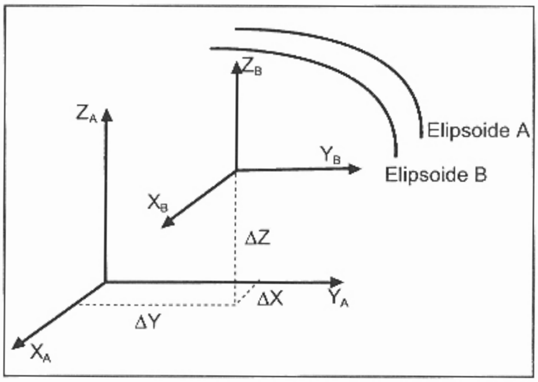

Figura 2. Transformación de Molodensky.

Las traslaciones (ΔX, ΔY, ΔZ) pueden ser determinadas calculando el promedio de las diferencias entre los puntos idénticos. La diferencia de achatamientos (Δf) y la diferencia de los semiejes mayores (Δa) son calculadas simplemente por sustraer los parámetros de ambos elipsoides de referencia. En la práctica la exactitud de este método está alrededor de 5 metros (ICSM 2000).

El modelo de transformación es el siguiente (RAPP 1985, p. 70):

$$\varphi_B = \varphi_A = \Delta\varphi \qquad (8)$$

$$\lambda_B = \lambda_A = \Delta\lambda \qquad (9)$$

$$h_b = h_A + \Delta h \qquad (10)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{(M+h)} * (-\Delta X \sin\varphi_A \cos\lambda_A - \Delta Y \sin\varphi_A \sin\lambda_A + \Delta Z \cos\varphi_A + \frac{\Delta a}{a}\left(N e^2 \sin\varphi_A \cos\varphi_A\right) + \Delta f\left(M\frac{a}{b} + N\frac{b}{a}\right)\sin\varphi_A \cos\varphi_A) \qquad (11)$$

$$\Delta\lambda = \frac{(-\lambda X \sin\lambda_A + \Delta Y \cos\lambda_A)}{(N+h)\cos\varphi_A} \qquad (12)$$

$$\Delta h = \Delta X \cos\varphi_A \cos\lambda_A + \Delta Y \cos\varphi_A \sin\lambda_A + \Delta Z \sin\varphi_A - \Delta a\frac{a}{N} + \Delta f\frac{b}{a} N \sin^2\varphi_A \qquad (13)$$

siendo:

φ_A, λ_A = latitud y longitud geodésica del punto a ser transformado.

$N = \dfrac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_A)}}$ = radio de curvatura en el primer vertical.

$M = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_A)^{3/2}}$ = radio de curvatura meridional.

$\Delta a = a_B - a_A$ = diferencia de semiejes mayores.

$\Delta f = f_B - f_A$ = diferencia de achatamientos.

Ventajas:

- Los parámetros son determinados en forma sencilla.
- Simple aplicación.

Desventajas:

- Se requiere conocer las alturas elipsoidales en el datum local.
- Se asume que las redes son consistentes internamente.
- Se asume que los datums son paralelos.

4. Método de regresión múltiple o interpolación bilinear

El método de regresión múltiple consiste en el ajuste de un polinomio en dos variables (U y V), las cuales son, a su vez, función de φ y λ. El polinomio representa una superficie de mejor ajuste entre los dos sistemas de coordenadas, por lo tanto, a diferencia de los métodos anteriormente mencionados, éste no depende de que los sistemas de coordenadas sean homogéneos, mejorando en forma notable la exactitud.

Los coeficientes del polinomio de transformación se encuentran aplicando un ajuste de mínimos cuadrados, basándose en los puntos idénticos. Este método puede ser utilizado cuando se cuenta con muchos puntos idénticos –puntos en común entre ambos sistemas de coordenadas–. La exactitud va a depender del conjunto de puntos idénticos que se utilice, pero en general se puede hablar que el método permite alrededor de 0.2 metros de exactitud (ICSM 2000).

En general, la forma del polinomio de transformación es la siguiente (NIMA 1997):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = {} & A_{00} + A_{10}U + A_{01}V + A_{20}U^2 + A_{11}UV + \\ & + A_{02}V^2 + A_{30}U^3 + A_{03}V^3 + A_{21}U^2V + \\ & + A_{12}UV^2 + \ldots + A_{99}U^9V^9 \end{aligned} \tag{14}$$

donde:

A_{00} = constante.
A_{ij} = coeficientes o parámetros de transformación determinados en el ajuste.

$U = k(\varphi_A - \varphi_m)$ = latitud geodésica normalizada del punto a ser transformado.

$V = k(\lambda_A - \lambda_m)$ = longitud geodésica normalizada del punto a ser transformado.

k = factor de escala, y conversión de grados a radianes.

φ_A, λ_A = latitud y longitud geodésica local del punto a ser transformado.

φ_m, λ_m = latitud y longitud media del área del datum local.

Ecuaciones similares son obtenidas para $\Delta\lambda$ y Δh, reemplazando $\Delta\varphi$ por $\Delta\lambda$ y Δh, respectivamente, en la ecuación 14. Las fórmulas de transformación son las siguientes:

$$\varphi_B = \varphi_A = \Delta\varphi \tag{15}$$

$$\lambda_B = \lambda_A = \Delta\lambda \tag{16}$$

$$h_B = h_A + \Delta h \tag{17}$$

Ventajas:

- Gran exactitud.
- El polinomio de transformación es capaz de manejar factores de escala en distintas direcciones.
- Los sistemas pueden ser no homogéneos.

Desventajas:

- Dependiendo del grado del polinomio, se podrían necesitar muchos puntos idénticos, lo que algunas veces es difícil de conseguir.
- El grado del polinomio es determinado empíricamente.
- El efecto de borde en la superficie que representa el polinomio hace que fuera del área de los puntos idénticos usados para determinar el polinomio de transformación los resultados no sean confiables.

En el anexo 2 se brinda el código de un programa basado en MatLab para determinar los coeficientes del polinomio de transformación para el método de regresión múltiple.

5. Transformación de coordenadas planas

Esta estrategia se basa en transformar las coordenadas de cuadrícula, es decir, las coordenadas planas de la proyección cartográfica que se aplicó al datum "A", hacia las coordenadas de cuadrícula de la proyección cartográfica que se aplicó al datum "B". Para realizar la transformación se pueden usar los métodos de Helmert (en dos dimensiones) o interpolación bilinear, etc.

Las ecuaciones de transformación utilizando el método de Helmert toman en cuenta dos traslaciones (Δx, Δy), una rotación (α) y un factor de escala (m). La relación entre los dos sistemas de coordenadas queda expresada por la siguiente ecuación (KELLER 2001):

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m\cos\alpha & m\sin\alpha \\ -m\sin\alpha & m\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}^A \tag{18}$$

Tomando $a = m\cos\alpha$ y $o = -m\sin\alpha$, entonces, la ecuación 18 puede ser rescrita de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -o \\ o & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}^A \tag{19}$$

Una vez resueltos los parámetros a y o, podemos encontrar el ángulo de rotación y el factor de escala entre los dos sistemas como:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{o}{a}\right) \text{ y } m = \sqrt{o^2 + a^2} \tag{20}$$

Para encontrar los parámetros de transformación se necesita un mínimo de dos puntos idénticos. La solución general donde se pueden considerar más de dos puntos idénticos está dada por la siguiente expresión (KELLER 2001):

$$a = \frac{\Sigma(u_i\overline{u}_i + v_i\overline{v}_i)}{\Sigma(u_i^2 + v_i^2)}, \quad o = \frac{\Sigma(u_i\overline{v}_i - v_i\overline{u}_i)}{\Sigma(u_i^2 + v_i^2)} \tag{21}$$

Conociendo los valores de a y o se pueden determinar los valores de los parámetros de traslación:

$$\Delta x = \overline{x}_s - ax_s + oy_s, \quad \Delta y = \overline{y}_s - ay_s - ox_s \tag{22}$$

donde:

$$x_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^A, \quad y_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^A$$

$$\overline{x}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^B, \quad \overline{y}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^B$$

$$u_i = x_i^A - x_s, \quad v_i = y_i^A - y_s$$

$$\overline{u}_i = x_i^B - \overline{x}_s, \quad \overline{v}_i = y_i^B - \overline{y}_s$$

Contrario a lo que sucede con el modelo de transformación de Helmert en tres dimensiones, en este caso no se le impone ninguna restricción a los ángulos de rotación.

Se puede utilizar el método de interpolación bilinear tomando U y V en función de las coordenadas planas.

Se debe recordar que cuando se aplica una proyección cartográfica se van a tener distorsiones, lo que implica una degradación en la exactitud de este método. Para más información sobre este tipo de transformación el lector es referido a Hoffman-Wellenhof *et al.* 1993, p. 242.

Ventajas:

- Método sencillo de implementar.
- No se necesita conocer alturas.

Desventajas:

- Afectado por las distorsiones de la proyección cartográfica.
- Baja exactitud.

6. Transformación de datum vertical

Hasta este punto, se han tratado los modelos de transformación de datum horizontal, en este apartado se abordará la transformación de datum vertical. Un caso representativo sería la transformación de una red vertical determinada en forma gravimétrica, la cual necesita ser referida a un datum local vertical. En este modelo de transformación se consideran dos giros y una traslación. En algunos casos se podría considerar un factor de escala de manera similar al modelo Bursa-Wolf. Un modelo particular de transformación está dado por la siguiente ecuación:

$$H_i^B = h_i^A + \Delta h + \begin{bmatrix} \theta & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix}^A \tag{23}$$

donde:

> Δh corresponde a la traslación vertical.
> ω, θ son las rotaciones correspondientes alrededor de los ejes x, y en un sistema local de coordenadas planas.
> H corresponde a la componente vertical en el sistema B.
> h corresponde a la componente vertical en el sistema A.

Para la determinación de los parámetros de transformación se necesitan como mínimo tres puntos idénticos en ambos sistemas. Un número mayor de puntos idénticos permite realizar un ajuste por mínimos cuadrados. El modelo de ajuste estará dado por las siguientes ecuaciones:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_1^B - h_1^A \\ H_2^B - h_2^A \\ H_3^B - h_3^A \\ \vdots \end{bmatrix}}_{y_{nx1}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & y_1^A & -x_1^A \\ 1 & y_2^A & -x_2^A \\ 1 & y_3^A & -x_3^A \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{A_{nx3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta h \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}}_{\xi_{3x1}} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{e_{nx1}} \tag{24}$$

con el vector de observación $y \sim (A\xi, \sigma_0^2 I)$ y rango $(A) = u = 3$. La solución por mínimos cuadrados está dada por las ecuaciones (3), (4), (5) y (6).

DISCUSIÓN

En el presente artículo se proveen diferentes estrategias de transformación de datum. Cada una de ellas posee ventajas y desventajas al ser aplicadas a trabajos geodésicos. El lector deberá seleccionar el método de transformación más apropiado para cumplir con los requerimientos exigidos para el trabajo particular que realizará. Los autores esperan que este artículo sirva como una guía de práctica y de discusión sobre los tópicos que abarca la problemática de la transformación del datum geodésico.

ANEXOS

Anexo 1: Código en MatLab 6.0 para determinar los siete parámetros de transformación por el método de Bursa-Wolf.

```
function [Param,Rot]=Datum7(DatumA, DatumB)
% function [Param,Rot]=Datum7(DatumA, DatumB)
% Descripción:
% Calcula transformación de datum 7 parámetros.
% Se utiliza un ajuste por mínimos cuadrados para determinar los 7 parámetros.
% Rotorna :
%       Param, vector de parámetros de transformación
%[Tx[m],Ty[m],Tz[m],Rx[rad],Ry[rad],Rz[rad],s]
%
%     Rot, matriz de rotación  1+s  Rz  -Ry
%                              -Rz  1+s  Rx
%                              Ry  -Rx  1+s
% Entrada:
%     DatumA, arreglo conteniendo las coordenadas X, Y, Z
%     de los puntos idénticos del DatumA.
%     DatumB, arreglo conteniendo las coordenadas X, Y, Z
%     de los puntos idénticos del DatumB.
%     El formato del arreglo Datum es el siguiente:
% DatumA=
% 4157222.5430     664789.3070     4774952.0990
% 4149043.3360     688836.4430     4778632.1880
% 4172803.5110     690340.0780     4758129.7010
% 4177148.3760     642997.6350     4760764.8000
% 4137012.1990     671808.0290     4791128.2150
% 4146292.7290     666952.8870     4783859.8560
% 4138759.9020     702670.7380     4785552.1960
% DatumB=
% 4157870.1370     664818.5780     4775416.4240
% 4149691.0490     688865.7850     4779096.5880
% 4173451.3540     690369.3750     4758594.0750
% 4177796.0640     643026.7000     4761228.8990
% 4137659.5490     671837.3370     4791592.5310
% 4146940.2280     666982.1510     4784324.0990
% 4139407.5060     702700.2270     4786016.6450

% m=NÚMERO DE PUNTOS IDÉNTICOS
[m,n]=size (DatumA);

% CARGAR LAS COORDENADAS DE PUNTOS IDÉNTICOS DEL DatumA EN VECTORES
%       X1(COORDENADAS X), Y1(COORDENADAS Y), Z1(COORDENADAS Z)
x1=DatumA(:,1);
y1=DatumA(:,2);
z1=DatumA(:,3);

% CARGAR LAS COORDENADAS DE PUNTOS IDÉNTICOS DEL DatumB EN VECTORES
%       X1(COORDENADAS X), Y1(COORDENADAS Y), Z1(COORDENADAS Z)
        x2=DatumB(:,1);
        y2=DatumB(:,2);
        z2=DatumB(:,3);

% CALCULAR VECTOR DE OBSERVACIONES REDUCIDAS b
i=[1:m];
B=[(x2-x1),(y2-y1),(z2-z1)]';
b(1:m*3)=B(:,i);
b=b';
% CÁLCULO DE LA MATRIZ A
for i1=1:3:m*3
 j=(i1-1)/3+1;
 A(i1,1)=1;
 A(i1,2)=0;
 A(i1,3)=0;
 A(i1,4)=0;
 A(i1,5)=-z1(j);
 A(i1,6)=y1(j);
 A(i1,7)=x1(j);

 A(i1+1,1)=0;
 A(i1+1,2)=1;
 A(i1+1,3)=0;
 A(i1+1,4)=z1(j);
 A(i1+1,5)=0;
 A(i1+1,6)=-x1(j);
 A(i1+1,7)=y1(j);

 A(i1+2,1)=0;
 A(i1+2,2)=0;
 A(i1+2,3)=1;
 A(i1+2,4)=-y1(j);
 A(i1+2,5)=x1(j);
 A(i1+2,6)=0;
 A(i1+2,7)=z1(j);
end

% CÁLCULO DE LA MATRIZ Qxx
Qxx=inv(A'*A);

% CÁLCULO DEL VECTOR DE INCÓGNITAS AJUSTADO x
x=Qxx*A'*b;
```

```
% MATRIZ DE ROTACIÓN
R=[1+x(7),x(6),-x(5);-x(6),1+x(7),x(4);x(5),-
x(4),1+x(7)];

% VECTOR DE TRASLACIONES
t=[x(1);x(2);x(3)];

% CÁLCULO DE DIFERENCIAS ENTRE COORDE-
NADAS CALCULADAS Y COORDENADAS DE
PUNTOS IDÉNTICOS
for i1=1:m
  at=[x1(i1);y1(i1);z1(i1)];
  vt= t + R * at;
  trans(i1,:)=[vt(1),vt(2),vt(3)];
  res(i1,:)=[x2(i1)-vt(1),y2(i1)-vt(2),z2(i1)-vt(3)];
end

%tt=trans;
tt=res;

% CÁLCULO DE RESIDUOS DEL AJUSTE - e=y-Ax
e=b-A*x;

% SIGMA 0
sigma=( (e'*e)/(m*3-7) )^0.5;

fprintf(1,'%s \n','______________________________');
fprintf(1,'%s \n',' pto     X[m]     Y[m]     Z[m]')
fprintf(1,'%s\n\n','______________________________');

for j=1:m
 fprintf(1,'%4d %s %12.3f %12.3f %12.3f\n',j,'Sistema
1 ', x1(j),y1(j),z1(j))
  fprintf(1,'%s %12.3f %12.3f %12.3f \n',' Sistema 2
',x2(j),y2(j),z2(j))
    fprintf(1,'%s %12.3f %12.3f %12.3f \n','
Transformado',trans(j,1),trans(j,2),trans(j,3))
  fprintf(1,'%s %12.3f %12.3f %12.3f \n',' Residuo
',res(j,1),res(j,2),res(j,3))
  fprintf(1,'%s \n',' ');
end

fprintf(1,'%s\n','______________________________');
fprintf(1,'%s \n','Parámetro      valor   Desv. estándar
+/-')
fprintf(1,'%s\n\n','______________________________');

fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Traslación X
[m].........:',x(1),sqrt(Qxx(1,1))*sigma)
fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Traslación Y
[m].........:',x(2),sqrt(Qxx(2,2))*sigma)
fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Traslación Z
[m].........:',x(3),sqrt(Qxx(3,3))*sigma)

fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Rotación X [«]
.........:',x(4)*180/pi*3600,sqrt(Qxx(4,4))*sigma*180/
pi*3600)
fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Rotación Y [«]
.........:',x(5)*180/pi*3600,sqrt(Qxx(5,5))*sigma*180/
pi*3600)
fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f \n','Rotación Z [«]
.........:',x(6)*180/pi*3600,sqrt(Qxx(6,6))*sigma*180/
pi*3600)

fprintf(1,'%s %12.3f %15.3f\n','Factor de escala [ppm]
..:',x(7)*1e6,sqrt(Qxx(7,7))*sigma*1e6)


% RETORNAR PARÁMETROS
Param=x;
Rot=R;
```

Anexo 2: Código en MatLab 6.0 para determinar los coeficientes del polinomio de transformación para el método de regresión múltiple.

```
function [a,b,x0,y0]=Datum_interpo (DatumA, DatumB,orden)
% function [a,b]=Datum_interpo(DatumA, DatumB, orden)
% Descripcion:
%       Determina los coeficientes del polinomio para la transformación
%       de DATUM.
%       Se utiliza una interpolación bilinear para determinar los
%       coeficientes del polinomio.
% Rotorna :
%       a, vector de coeficientes para eje U
%         [a0, a1, a2,a3, a4,a5,a6....,a14]
%       b, vector de coeficientes para eje V
%         [b0, b1, b2,b3, b4,b5,b6....,b14]
%
%       x0,y0, baricentro del DatumA
%
%
% Entrada:
%   DatumA, arreglo que contiene las coordenadas X, Y de los puntos
%     idénticos del DatumA.
%   DatumB, arreglo que contiene las coordenadas X, Y de los puntos
%     idénticos del DatumB.
%
%
%
% Los arreglos Datum deben ser vector columna de la siguiente forma:
%    X Y
% DatumA=
%    4157222.5430    664789.3070
%    4149043.3360    688836.4430
%    4172803.5110    690340.0780
%    4177148.3760    642997.6350
%    4137012.1990    671808.0290
%    4146292.7290    666952.8870
%    4138759.9020    702670.7380
% DatumB=
%    4157870.1370    664818.5780
%    4149691.0490    688865.7850
%    4173451.3540    690369.3750
%    4177796.0640    643026.7000
%    4137659.5490    671837.3370
%    4146940.2280    666982.1510
%    4139407.5060    702700.2270
%

%N=número de puntos de la red
N=size(DatumA,1)

%Calculando el baricentro del DATUMA
x0=sum(DatumA(:,1))/N
U=[(DatumA(:,1)-x0)*10^-5]

y0=sum(DatumA(:,2))/N
V=[(DatumA(:,2)-y0)*10^-5]

%formando la matriz de ecuaciónes normales A
K=[1:N]
unos=ones(N,1)

if (orden==2)
  A=cat(2,unos,U,V,U.^2,U.*V,V.^2)
elseif (orden==3)
  A=cat(2,unos,U,V,U.^2,U.*V,V.^2, U.^3 , U.^2.*V,U.*V.^2,V.^3)
elseif (orden==4)
  A=cat(2,unos,U,V,U.^2, U.*V,V.^2, U.^3 , U.^2.*V,U.*V.^2,V.^3, U.^4, U.^3.*V, U.^2.*V.^2,U.*V.^3,V.^4)
end

%Calculando el baricentro del DATUMB
 x0n=sum(DatumB(:,1))/N
 y0n=sum(DatumB(:,2))/N

 Un=[(DatumB(:,1)-x0n)*10^-5]
 Vn=[(DatumB(:,2)-y0n)*10^-5]

%vector de observación es reducido para eje U
 Dx=Un-U

%Determinación a=vector de coeficientes para eje U por mínimos cuadrados
 a=inv(A'*A)*A'*Dx
 a=a*10^5
 a(1)=a(1)+x0n

%vector de observación es reducido para eje V
Dx=Vn-V

%Determinación b=vector de coeficientes para variable U por mínimos cuadrados

 b=inv(A'*A)*A'*Dx
 b=b*10^5
 b(1)=b(1)+y0n
```

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Hoffman-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. and Collins, J. 1993. *Global Positioning System: Theory and Practice*. Second edition. Springer-Verlang, Wien, New York.

ICSM. 2000. *Transformation Options*. http://www.icsm.gov.au/icsm/gda/gdatranfact.pdf

Jekeli, C. 2002. *Geometric Referent Systems*. Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, The Ohio State University. Columbus, Ohio.

Keller, W. 2001. *Geodetic Coordinate System*. Geodetic Institute, University Stuttgart.

NIMA. 1997. *Department of Defense World Geodetic System 1984, its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems*. Third edition. National Imagery and Mapping Agency.

Pearse, M. and Crook, C. 1997. *Recommended transformation parameters from WGS84 to NZGD49*. http://www.linz.govt.nz/rcs/linz/6081/recommendedtransformation parameters.pdf

Rapp, R. 1985. *Geodesia Geométrica, Volumen II (Técnicas avanzadas)*. Agencia Cartográfica de Defensa, Servicio Geodésico Interamericano. Escuela Cartográfica. Panamá, DMA-IAGS CT-6.